# Le calcul et les mathématiques à partir de la quatrième classe

Traduction d'une partie du sixième chapitre du livre *Rekenen in beweging*

**Version du 1er octobre 2017**



---


Éditeur : Reklamestudio Kees Kuiphof bNO, Ede.


Auteurs : Kees van Broekhuizen, Fred Goffree, Frank de Kiefte, Jan Kraamwinkel, Peter Landweer, Paul van Meurs, Job de Raadt, Kees Verhage, Pieter Witvliet, Annemieke Zwart.


Traduction : Alette Boebaert et Luc Lismont avec la collaboration de Michelle Anciaux. Toutes les remarques permettant d'améliorer cette traduction (style, orthographe, passage peu clair ou incompréhensible...) sont les bienvenues. Merci de les communiquer à Luc Lismont.

# 1 Nombres décimaux

## 1.1 Orientation sur un nouveau terrain

### Que sont les nombres décimaux ?

Les nombres décimaux (ou fractions décimales) sont aussi appelés nombres à virgule [1]. En disant cela, on en a dit en quelque sorte l'essentiel, dans la mesure où l'on tient compte évidemment de leur écriture positionnelle. La découverte des nombres décimaux date de 1585, lorsque Simon Stevin publia sa trouvaille dans le petit livre *La dîme*. En fait, ce livre était un plaidoyer pour introduire les dixièmes dans l'écriture (positionnelle) des nombres. Avec ces nombres, le calcul se ferait plus facilement qu'avec les chiffres romains et les fractions ordinaires.

Avec les nombres décimaux, on calcule donc plus facilement. Celui qui peut calculer par écrit avec des nombres entiers peut également le faire avec les fractions (décimales). Dans le calcul écrit, elles se comportent pratiquement comme des nombres entiers. Seule la règle qui détermine le nombre de chiffres après la virgule doit en plus être prise en compte.

On peut à titre d'exemple comparer le calcul $23\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{2}$ avec $23,75 \times 5,5$ (lorsque l'on veut par exemple connaître le prix d'un morceau de multiplex de 23,75 cm × 5,5 cm).

Alors qu'au début les nombres à virgule furent très mal accueillis chez les utilisateurs (les commerçants par exemple, qui y virent toutes sortes de possibilités de faux), on ne peut plus, depuis lors, s'en passer dans la vie de tous les jours. En particulier lors de mesures ou de calculs avec de l'argent, les nombres à virgule sont incontournables. Cela veut dire entre autres que les nombres décimaux sont indispensables pour mesurer. Celui qui sait que mesurer ne donne jamais qu'un résultat approximatif et qui comprend les nombres à virgule peut apprécier plus sûrement la précision du résultat d'une mesure. Par exemple, dans une distance de 60,25 mètres, on a mesuré au centimètre près.

Le thème des nombres décimaux n'est pas autonome. Le lien avec les fractions ordinaires est naturellement évident. C'est aussi vrai en ce qui concerne sa relation aux « pourcentages » et aux « proportions ». Ce dernier domaine peut être vu comme un pont entre les domaines des fractions, des nombres à virgule et des pourcentages.

Prenons la fraction $\frac{1}{4}$. Écrite sous la forme d'un nombre à virgule, c'est $0,25$. En pourcents, c'est 25 %. Que signifie 25 % ? Depuis belle lurette, 25 % c'est 25 pour cent ou bien $\frac{25}{100} = 0,25$. La boucle est bouclée.

On peut se demander pourquoi, après la découverte des nombres à virgule, les fractions ont continué à exister. Dans le passé (récent), certains mathématiciens voulurent réduire l'enseignement du calcul en primaire aux seuls nombres à virgule. Heureusement cela ne se fit pas.

Hormis le fait que les nombres à virgule attirent fortement l'attention sur les chiffres, ils ont aussi quelques limitations. Prenons seulement le cas d'un partage entre trois personnes qui n'auraient pas $\frac{1}{3}$ mais quelque chose comme $0,333\ldots$ Il n'y a que peu de fractions ordinaires qui se laissent convertir sans plus en nombres à virgule. Par exemple $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{25}$ et d'autres similaires. Ce sont les fractions qui n'ont plus que les facteurs 2 et/ou 5 dans le dénominateur lorsqu'elles ont été entièrement simplifiées. Dans tous les autres cas, on doit arrondir (par exemple $\frac{1}{6} \simeq 0,167$) ou tronquer ($\frac{1}{6} \simeq 0,166$). Pour l'utilisation quotidienne des fractions, cela pose cependant peu de problèmes. Du reste, ce thème, convertir les fractions ordinaires en nombres à virgule, offre aux élèves un travail de recherche intéressant dans le domaine du calcul et des mathématiques.

1. Avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

### Les nombres décimaux en 5e classe (et après)

Dans l'introduction ci-dessus, nous avons esquissé l'intérêt du sujet. L'importance sociale et les possibilités du point de vue du calcul et des mathématiques sont évidentes. Des aspects importants de ce domaine d'enseignement ont aussi déjà été mis en avant. Arrivons-en aux points essentiels pour l'enseignement des fractions décimales en 5e.

### Connaissance et savoir-faire élémentaires

On peut penser entre autres à :

* un demi $= \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5 = 50\%$ ;
* $0,25 = \frac{25}{100} = 25\% = \frac{1}{4} =$ un quart ;
* $0,125 =$ cent vingt cinq millièmes $= \frac{1}{8}$ ;
* la valeur des chiffres dans les nombres avec virgule dépend de leur position ;
* l'idée de la précision en relation avec le nombre de chiffres après la virgule.

### Savoir-faire en calcul écrit

Cela concerne la connaissance et le savoir-faire de base en rapport avec les techniques de calcul.
On peut penser à des questions comme celles-ci :

* Comment calcule-t-on $0,125 + 3,5$ ?
* Comment calcule-t-on $2,25 \times 3,75$ ?
* Comment calcule-t-on $3,75 : 5$ ?
* Comment calcule-t-on $3,25 : 0,25$ ?
* Jusqu'où poursuivre la division (partie décimale après la virgule) dans une situation donnée ?
* Scions une planche de $2,25$ m en 7 morceaux égaux. Quelle est la longueur de chaque morceau ?
* Comment convertir des fractions simples en nombres décimaux ?
* Pourquoi $10 \times 12,25 = 122,5$ ? Pourquoi, dans ce cas, est-ce mieux de dire que les chiffres se déplacent et non la virgule ?


*Exemple de crayons de couleurs. Boîtes de 20. Deux élèves utilisent 1 boîte. Utilisation depuis le 1er janvier 1993. Au 7 avril 1993, le pourcentage d'utilisation est calculé ; 16 boîtes sont utilisées.*

### Observations intéressantes pour le calcul et les mathématiques

Par exemple des « lois » (particularités, régularités, patterns) peuvent être observées dans la conversion des fractions en nombres à virgule.

### Domaines d'application

Par exemple, celui de l'argent. Dans la vie de tous les jours, les enfants calculent souvent avec de l'argent. De ce fait, c'est un domaine d'application qui offre un bon sujet pour introduire les nombres décimaux et donne une base concrète fondée sur l'expérience et le vécu.
Pour mesurer, les nombres décimaux sont essentiels. Les résultats des mesures, exprimés en nombres à virgule (nombres décimaux), donnent la précision de la mesure. Bien évidemment, le contexte du mesurage et le système métrique ne doivent pas être oubliés.
Il y a beaucoup de domaines d'application pour les nombres à virgule. Pensons aux étiquettes donnant les prix, tickets, publicités, pompes à essence, records de sportifs, tableaux de distances, vitesse du vent, liste de courses, panneaux indicateurs, fréquences radio, mesures de vitesse, etc. Il s'agit de prendre sérieusement en considération ces domaines d'application des mesures, afin de donner du « sens » au calcul avec les nombres à virgule pour les enfants.

### L'avis de Rudolf Steiner sur les nombres décimaux

Rudolf Steiner indique seulement que l'on peut passer aux nombres décimaux à partir de la 4<sup>e</sup> classe. Dans ses conférences, on ne trouve rien d'autre en rapport direct avec les nombres décimaux.
En 5<sup>e</sup>, il y a douze semaines de période. Il y a plus à faire que simplement mesurer et calculer avec les nombres avec virgule. La relation avec les fractions ordinaires et aussi les pourcentages simples (vus comme quantités par centaine) peut aussi être abordée, autant que possible dans des situations concrètes.

## 1.2 Compréhension élémentaire et savoir-faire de base

### Exemples de situations d'enseignement avec les nombres à virgule

Le sujet des nombres décimaux ne doit pas poser de grandes difficultés aux élèves. Les objectifs que l'on se donne [2] doivent être traités de manière différenciée. Les observations élémentaires et applications de base dans ce domaine doivent montrer une grande relation avec ce qui a déjà été appris dans le cadre des nombres entiers. La connaissance des sommes d'argent et le calcul qui s'y rapporte peut offrir un bon soutien pour les considérations plus abstraites.
Tous les élèves ne doivent pas atteindre le plus haut niveau d'abstraction. Pour la préparation des cours, on peut varier (et donc différencier) entre autres :

∗ la grandeur du nombre ;
∗ la complexité du calcul ;
∗ le niveau de soutien concret que l'on donne ;
∗ les relations avec les applications ;
∗ la précision exigée ;
∗ le choix entre calcul écrit et calcul mental (avec des approximations).

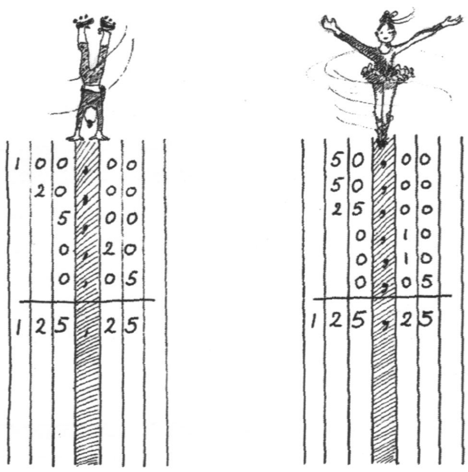
2. Voir le 9<sup>e</sup> chapitre *Les cours de mathématiques : objectifs centraux, balises et étalons*.

*J'ai commencé avec la question : où, dans la vie quotidienne, trouve-t-on des nombres décimaux ? Les enfants ont directement mentionné l'argent. J'ai pris cela comme point de départ pour la période*[3].

*[. . . ]*

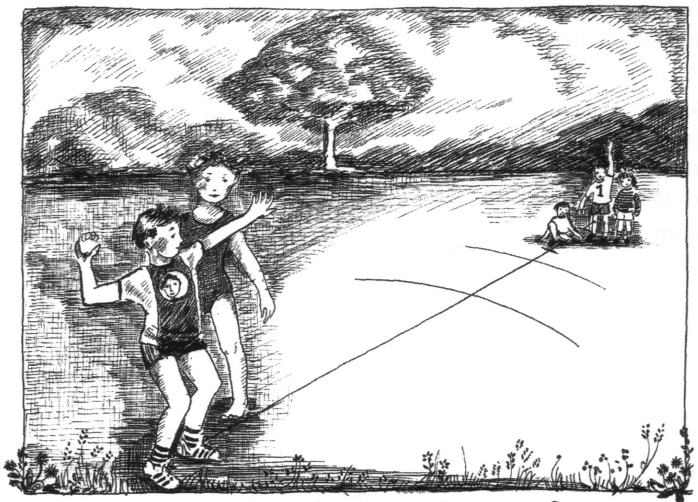
*Cela me frappa de voir les enfants écrire spontanément les virgules l'une en dessous de l'autre ; je ne dus donc pas m'y attarder.*

Est-on obligé d'écrire les virgules l'une en dessous de l'autre, ou est-ce seulement plus « habile » de le faire ? C'est naturellement cette deuxième idée qui est juste. Dans une addition ou soustraction, quand on met les virgules l'une en dessous de l'autre, le travail s'en trouve pour une bonne part facilité. Cette organisation du travail demande une attention particulière dans l'enseignement du calcul. Si les enfants ont déjà appris à utiliser des colonnes de position, alors le schéma d'organisation dans le cas des nombres décimaux est déjà donné.




Partir du concret offre de meilleures possibilités pour prendre pied dans le monde des nombres décimaux. Nous avons parlé des calculs avec de l'argent. Cela peut aussi se faire par le mesurage.
Prenons par exemple un jour de sport où les enfants ont effectué des lancers ou ont couru une certaine distance en un temps donné. À partir des résultats, on peut travailler à la compréhension des nombres décimaux.
Supposons par exemple un lancer de $16{,}25$ m. On peut le travailler de cette manière :
« Quelle distance le lancer a-t-il atteint ? »
« $16{,}25$ m »
« Dessine la situation au tableau. »
« Où a atterri la balle ? »
« Quelque part entre les lignes de 16 et 17 m. »
« Au-delà de 16 m. »
« Plus précisément : à 16 m et un quart. »
« Avec le mètre ruban : 16 m et $0{,}25$ m, ou encore 16 m 2 dm et 5 cm ; 16,25 m fait donc : $16 \text{ m} + \frac{2}{10} \text{ m} + \frac{5}{100} \text{ m}$. »

3. Ce qui suit est typiquement hollandais (la monnaie hollandaise avant l'euro comportait beaucoup de subdivisions). Je ne vois pas encore comment l'adapter et, pour le moment, ce n'est pas traduit (NdT).

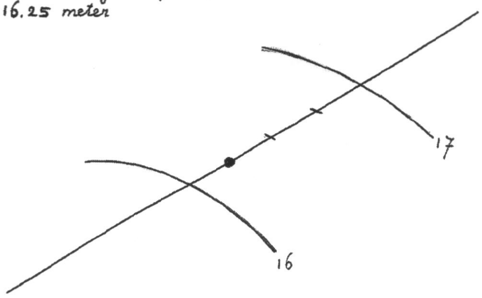


Waar komt het pittenzakje terecht ?

*Où atterrit le sac (rempli de noyau de cerises) ?*

Wat is er geworpen ?
16.25 meter

*Quelle est la distance ?*
*16,25 mètres*




Waar kwam het pittenzakje terecht ?

*Où atterrit le sac ?*

Il y a une différence entre l'utilisation des nombres à virgule dans le contexte de l'argent et dans celui des mesures. Mesurer n'est jamais tout à fait précis ; le résultat d'une mesure n'est qu'une approximation. C'est pour cela que les nombres décimaux se prêtent si bien aux mesures. Mais attention ! Plus il y a de chiffres après la virgule, plus précise *semble* la mesure. En effet, semble ! Prenons par exemple une planche d'un mètre. Il faut la scier en trois parties égales. Avant de la scier, on peut calculer quelle longueur aura chacune des trois petites planches. Qu'est-ce que cela donne ? 100 (cm) divisés par 3, cela donne 33,333333 cm. Mathématiquement, on peut aller aussi loin que l'on veut derrière la virgule. Mais jusqu'où allons-nous ? Le premier chiffre 3 après la virgule signifie 0,3 cm ; c'est 3 mm. Avec une bonne règle graduée, les 3 mm sont encore visibles, mais encore faut-il que la scie soit assez précise ! Le deuxième 3 après la virgule (0,3 mm) n'est plus visible sur notre règle graduée. Dans ce contexte-ci, une mesure de 33,333333 cm n'a donc pas de sens.

De telles considérations ne devraient pas échapper aux enfants de 5$^{e}$. Une réflexion sur le processus de mesurage en rapport avec le résultat de la mesure peut mener à une compréhension plus riche des nombres décimaux. Aussi bien au niveau du calcul qu'à celui de ses applications.

On peut bien sûr faire la même choses dans d'autres situations où l'on utilise les nombres décimaux. Il suffit de regarder dans le journal dans le livre des records, le *Guiness Book*. Les magasins de bricolage utilisent les nombres décimaux. Les dépliants et les catalogues de bricolage et de jardinage sont une source intarissable pour trouver des exercices concrets de calcul avec les nombres à virgule. Sur les emballages également, on ne peut éviter les nombres à virgule.

La figure suivante donne l'exemple d'une boîte de lait.


Il est bien pensable que tout ceci frappe le plus les enfants lorsqu'ils y sont personnellement impliqués : un jour de sport, en se tenant au courant des records des sportifs, en faisant des mesures, en pensant soi-même aux courses à faire…

*Nous avons disséqué toutes sortes de nombres. En commençant par le calcul avec de l'argent, nous sommes arrivés à l'essence des nombres décimaux.*

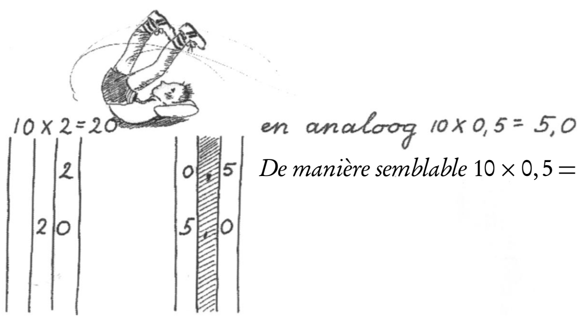
*Prenons le nombre 2345 : le 5 se trouve à la place des unités, le 4 à celle des dizaines, le 3 à celle des centaines et le 2 à celle des milliers. Donc $2345 = 2000 + 300 + 40 + 5$.*

*Tout chiffre vers la gauche a une valeur (qui dépend de sa position) dix fois supérieure à la valeur du chiffre à côté.*

*Unités, dizaines, centaines, milliers, nous pouvons continuer ainsi. Si nous allons de gauche à droite (comme pour la lecture), alors la valeur de chaque position est le dixième de la précédente. Nous avons vu avec l'argent qu'il ne faut pas toujours s'arrêter aux unités. On va « après la virgule » avec les dixièmes et les centièmes. Et l'on peut se demander pourquoi l'on s'arrêterait aux centièmes ?*

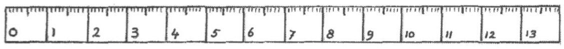
Milliers, centaines, unités, dixièmes, centièmes, millièmes.
La virgule se trouve donc à la frontière entre les nombres entiers et le monde des fractions.
Sachant tout cela, nous avons imaginé beaucoup de nombres en mouvement ; chaque position d'un chiffre dans le nombre avait un mouvement déterminé.

Maintenant nous en arrivons à la multiplication des nombres par 10. Nous pouvons repartir de ce qui a été fait dans les années précédentes.
Par exemple : $10 \times 2 = 20$. Le 2 se met à la position de la dizaine. Comment faisions-nous cela « auparavant » ? Le savez-vous encore, 10 fois 2 (souliers), cela voulait dire naturellement que nous cherchions le nombre de souliers dans 10 paires. Les colonnes de position ont été introduites à ce moment. Cela vaut la peine d'y revenir.




*De manière semblable* $10 \times 0,5 = 5,0$

On peut aussi lire la dernière colonne de cette figure comme $10 \times \frac{1}{2}$. Plus facilement[4] encore comme $\frac{1}{2} \times 10$ ; ainsi nous arrivons aussi à la réponse 5. Encore autrement (on choisit différents exemples pour aider à la compréhension) : « Faisons 10 petits sauts de $0,5$ cm au-dessus de la règle graduée. Où arrivons-nous ? »




De cette manière, nous avons suivi trois pistes :

1. celle du calcul écrit vu avant ;
2. au travers des fractions vues en 4e ;
3. par les mesures sur la règle graduée (ligne des nombres).

Ces activités sont connues du passé. L'intention, c'est que les enfants découvrent certaines règles de calcul ou en inventent. Par exemple : $10 \times 3,75 = 37,5$ et $10 \times 12,25 = 122,5$. « Qu'est-ce qui se passe ici ? »
Il faut toujours avoir en tête, dans ces exemples, que le calcul avec de l'argent peut offrir un bon soutien quand la règle de calcul n'est pas encore perçue. Par exemple : $10 \times 3$€ c'est $30$€ ; $10 \times 50$ cents c'est $5$€ ; ensemble, cela fait $30$€ et $50$ cents ou $30,50$€.

Dans le cas de $100 \times 0,5 = 50,0$ on élargit l'approche précédente : $10 \times (10 \times 0,5) = 10 \times 5$, et on arrive à 50. Si l'on écrit les nombres dans les colonnes de position, on peut alors le visualiser : le 5 du 0,5 se trouve à la position des dixièmes ; après multiplication par 100, il va à la position des dizaines. C'est deux positions de plus vers la gauche. Donc un déplacement du nombre et non de la virgule !

*Au travers d'un jeu, on a fait prendre conscience une nouvelle fois que, dans une multiplication par 10, la virgule est une frontière que les chiffres de droite franchissent vers la gauche.*


*dizaines unités virgule dixièmes centièmes millièmes*

*Les enfants étaient les chiffres d'un nombre donné. Les centaines se trouvaient sur la table, les dizaines sur une chaise, les unités au sol. Un enfant tenait le panneau de la virgule ; la frontière ! À côté, les dixièmes à genoux, les centièmes assis. Aux extrémités il y avait une table avec une chaise pour les milliers, et de l'autre une place pour se coucher pour les millièmes.*

4. Il me semble que ce n'est pas du tout si facile ! Il y a une différence entre prendre dix fois la moitié de quelque chose et prendre la moitié de dix objets. Et il y a encore une grande différence entre prendre la moitié de … et faire $\frac{1}{2} \times \ldots$ (Note de Luc Lismont).

*Pour pouvoir montrer le nombre, ils recevaient chacun une carte avec un chiffre. Alors l'exercice était donné : « Je multiplie ce nombre par 10 (plus tard aussi par 100 etc.) ». Tous les enfants « montaient » d'une (ou de plusieurs) place(s).*

*Pour la division, cela se passait naturellement autrement. Nous avons ensuite exercé ce calcul de différentes manières dans le cahier.*

*Ainsi l'idée de déplacement des nombres a été mise naturellement en évidence. Je n'ai jamais trouvé correcte l'expression de déplacement de la virgule.*

Naturellement, tout ceci dépend de la manière dont on le considère. Si on fixe le nombre, alors la virgule se déplace après la multiplication. Vous allez voir qu'avec l'emploi des bandes de position les enfants sont amenés à dire : le nombre se déplace parce que les chiffres vont (dans la multiplication par 10) une place au-dessus (à gauche donc). C'est logique, puisque c'est ainsi que notre système décimal positionnel est construit.

## 1.3 Exercices

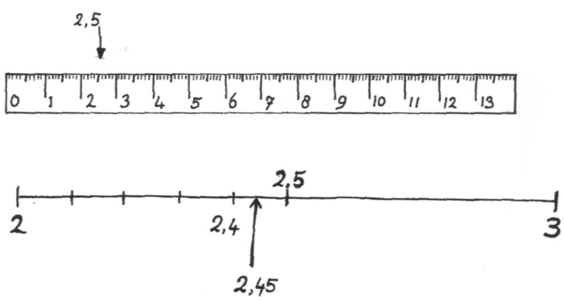
### Dictées de nombres

Les dictées de nombres aident les enfants à exprimer les nombres d'une manière adéquate. Que veut dire « adéquat » ? Les nombres à virgule sont utilisés dans plusieurs situations. Et chaque situation a son contexte spécifique. À l'école, on entend le nombre 425, 12 comme quatre cent vingt cinq unités et douze centièmes. C'est une manière de laisser entendre que l'on connaît la valeur des chiffres après la virgule. Dans un contexte didactique, c'est donc quatre cent vingt cinq unités et douze centièmes, ou quatre cent vingt cinq et douze centièmes. Mais prenons encore le montant de : 425, 12€. Cela on le prononce naturellement 425€ 12. Ou 425€ et 12 cents. Ou 425 12. Ou encore 425 virgule 12.

### Ranger des nombres décimaux par ordre croissant

Voir la fraction ordinaire derrière une fraction décimale :

* « Qu'est-ce qui est plus grand : 0, 1 ou 0, 01 ? »
* « Quel nombre se trouve le plus près de 2, 5 : 2, 45 ou 2, 443 ? » Une règle graduée ou la ligne des nombres peuvent aider.




* « Entre quels nombres entiers se trouve 2, 3 ? »

### Conversion des fractions en nombres avec virgule

Ce sujet nous ramène au niveau du calcul abstrait. La question est : « Comment convertir une fraction ordinaire en un nombre décimal ? »

Commençons par $\frac{1}{2} = 0,5$. Cela nous le savions déjà. Mais comment avons-nous trouvé cela ? Laissons les enfants parler. Souvent ils ont eux-mêmes de bonnes idées.

Par exemple :

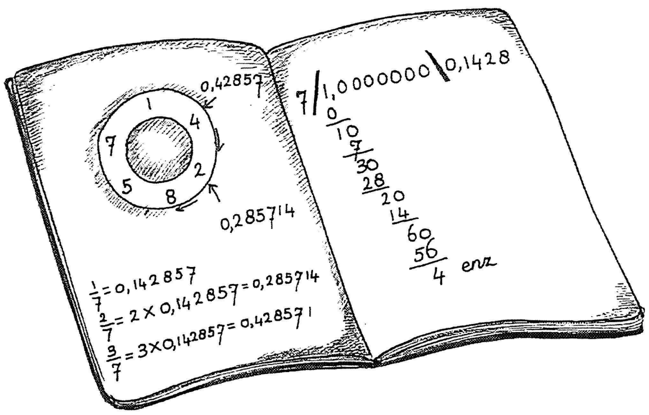
* Un demi-euros vaut 50 centimes. Très concret donc. Mais il faut voir que $0,5 = 0,50$. Y avons-nous déjà prêté attention ?
* Un demi ($\frac{1}{2}$) signifie que l'on a divisé 1 par 2. On va donc faire la division.
* On peut le voir aussi comme ceci : on transforme $\frac{1}{2}$ en dixièmes $\frac{5}{10}$ ou en centièmes $\frac{50}{100}$.

Comment trouve-t-on $\frac{3}{8} = 0,375$ ? Cela peut se faire via $\frac{1}{8}$ et puis $3\times$. Certains enfants connaissent $\frac{1}{8}$ par cœur ou peuvent facilement le calculer via la moitié de $\frac{1}{4}$ ($= 0,25 : 2$). Sinon, il faut diviser ou regarder sur une règle graduée de 100 cm (= 1000 mm). Ces exercices sont nécessaires car elles permettent aux enfants de savoir par cœur que $\frac{1}{8}$ est égal à $0,125$ ou $12,5\,\%$. Et ils l'apprennent avec une image visuelle et un contexte concret en arrière plan. En fait, différents domaines se rejoignent : division, calcul mental, mesurage, fractions et nombres à virgule/pourcentages.

> Que fait-on, en tant que professeur d'une école Waldorf, lorsque les enfants posent la question « à quoi ça sert de savoir tout cela » ? On prend naturellement cette question très au sérieux.

Ceux qui s'intéressent aux nombres seront surpris de convertir $\frac{1}{7}$ en fraction décimale. Pour créer un cadre dans lequel on peut contrôler la valeur de la fraction décimale qui lui correspond, on peut commencer par une estimation. Il y a sept élèves de sixième classe qui ont gagné 100 euros pour l'école. Commbien a gagné chaque élève de ce groupe ? Il faut partager 100 euros en 7. À peu près 14 euros puisque $7 \times 14 = 98$. Il reste encore deux euros, ce qui vaut 8 fois 25 cents. Si on les répartit entre tous les sept, chacun reçoit 25 cents, c'et-à-dire 0,25 euros. Il reste 25 cents. Répartis entre les 7, cela fait 3 cents. Il reste encore 4 cents qu'on peut laisser tomber. Ainsi, 100 divisé par 7, c'est environ 14,28.

On peut faire maintant cette « longue » division écrite sans oublier ce que nous venons de faire.




Vous pouvez demander aux élèves : « Pourquoi "etc" [5] ? » Et ensuite : « Combien de temps est-ce que cela va prendre pour faire cette division jusqu'au bout ? Est-ce que tu es sûr de ta réponse ? Est-ce que tu peux l'expliquer aux autres ? »

L'essentiel est bien sûr qu'il n'y aura jamais de reste égal à zéro. On peut le « savoir » de deux manières.

La première, c'est quand le reste 1 réapparaît. On est alors au même point que là où a commencé la division : « le reste est un, on reporte un 0, combien de fois 7 en 10 ? Une fois... et ainsi de suite. »

5. « enz. » dans le dessin.

On peut aussi voir les choses différemment, plus abstraitement. Pour convertir la fraction $\frac{1}{7}$, on devrait transformer le dénominateur 7 pour en faire une puissance de 10. Et cela, c'est impossible, car une puissance de 10 ne contient que les seuls facteurs 2 et 5. Et voilà ! Soit dit en passant, ce raisonnement ne conviendra pas vraiment pour toute la classe.

Le travail artisanal de conversion a provoqué un véritable enthousiasme dans la classe. Ils trouvent que $\frac{1}{7}$ est un cas étrange. Nous avons recherché encore les uns avec les autres :

$\frac{1}{7} = 0,142857...$

$\frac{2}{7} = 2 \times 0,142857... = 0,285714...$

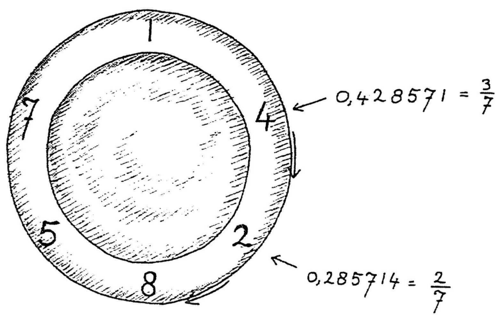
$\frac{3}{7} = 3 \times 0,142857... = 0,428571...$

$\frac{4}{7} = 4 \times 0,142857... = 0,571428...$

$\frac{5}{7} = 5 \times 0,142857... = 0,714285...$

$\frac{6}{7} = 6 \times 0,142857... = 0,857142...$

Si nous écrivons en cercle les chiffres après la virgule de $\frac{1}{7}$, on peut aussi y lire les les chiffres après la virgule des autres fractions. Il suffit de sélectionner un point de départ différent.



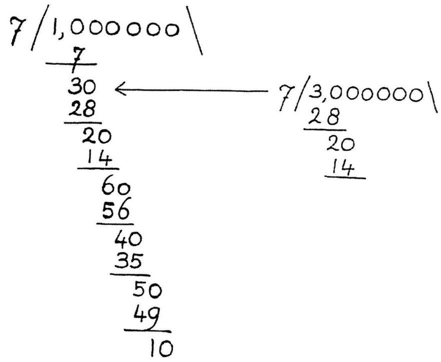

Les enfants peuvent se demander comment cela se fait que le même schéma se répète.

$\frac{1}{7} = 0,142857\ 142857\ 142857\ 142857\ 142857$, etc.

Pour en chercher la raison, il faut encore bien observer cette division. On voit alors, comme on a déjà pu le constater plus tôt, que le premier reste, 1, revient après six fois. Avant cela, il y a eu au total six restes : 1, 3, 2, 6, 4 et 5. Ce sont précisément les six nombres plus petits que 7.

Maintenant, prenons par exemple la fraction $\frac{3}{7}$. Il faut faire la division $3,000000 : 7$.

La première division à faire est $30 : 7$. Et cela, c'était la deuxième division dans le cas de la fraction $\frac{1}{7}$. Et ce qui se passe ensuite, c'est dans les deux cas la même chose. Et donc, ce qui se passe dans le cas de $\frac{3}{7}$, c'est que les restes apparaissent dans l'ordre 3, 2, 6, 4, 5 et 1, ce qui est le même ordre que les chiffres de $\frac{1}{7}$. donc $\frac{3}{7} = 0,4285714$ et ainsi de suite.




Évidemment, nous n'avons converti qu'un certain nombre de fractions en fractions décimales. En faisant cela, nous exerçons aussi la division ; un bon exercice !

$\frac{1}{2}$ = 0,5

$\frac{1}{3}$ = 0,333333333333

$\frac{1}{4}$ = 0,25

$\frac{1}{5}$ = 0,2

$\frac{1}{6}$ = 0,666666666666

$\frac{1}{7}$ = 0,142857142857

$\frac{1}{8}$ = 0,125

$\frac{1}{9}$ = 0,111111111111

$\frac{1}{10}$ = 0,1

Les enfants de cinquième et sixième classe doivent-ils connaître cette liste par cœur ? Et si oui, pourquoi ? Doivent ils savoir que $\frac{1}{3}$ conduit à une décimale récurrente (une période) ? Et si nous entrons dans ce problème, doivent-ils apprendre qu'il existe d'autres répétitions de parties décimales, comme nous l'avons vu précédemment avec $\frac{1}{7}$? La réponse que l'on trouve dans les programmes peut contenir des éléments personnels !
Est-ce que nous allons aussi convertir une fraction comme $\frac{25}{43}$? Si nous faisons cela comme exercice, nous devons saisir cette occasion pour faire une estimation. Ce que les enfants ont à faire ? Tout d'abord, reconnaître que, par exemple, $\frac{25}{43} > \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 0,5$. Et de manière encore plus précise que $\frac{25}{43} > \frac{25}{45} = \frac{5}{9} = 0,555555....$

### Convertir des nombres à virgules en fractions

Faisons-nous le chemin inverse ? Alors, nous cherchons à transformer par exemple 0,55 en fraction. Comment cette question se résout pour les nombres décimaux (dont le nombres de décimales est fini) est facile. Le chemin nécessaire pour aller de 0,55555... à $\frac{5}{9}$ passe par la simplification des fractions. Techniquement parlant à trouver des dénominateurs communs, décomposer en facteurs et diviser [6]. Pas la peine d'en faire tout un plat.

### Nombres à virgules et pourcentages

C'est aussi important d'établir un lien avec les pourcentages. Nous avons vu ci-dessus que $\frac{1}{2} = 0,50$ ou 50%.

Cette connexion entre nombres à virgules, fractions et pourcentages peut être mis à profit. L'exemple suivant, qui est un exercice difficile, le laisse entrevoir :

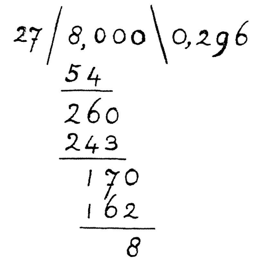
La question est : « Quel est le pourcentage de 8 par rapport à 27 ? »

Au XVI^e siècle, la question pouvait se formuler : Combien font « par rapport à 100 » 8 de 27 [7] ? Dans cette formulation, l'essence de la question peut apparaître : quel est le nombre qui se comporte vis à vis de cent de la même manière que 8 par rapport à 27.

Regardons la fraction (c'est un rapport) $\frac{8}{27}$. On la transforme en écriture décimale en effectuant la division.

6. En fait, ce n'est pas nécessaire pour $0,5555...$ que l'on sait être égal à $\frac{5}{9}$, mais bien pour des nombres dont la période comporte plus d'un chiffre. Et là aussi, la recherche de dénominateur commun n'est pas nécessaire. Il faut avoir observé quelques exemples comme ceux-ci : $\frac{27}{99} = 0,272727...$ ; $\frac{346}{999} = 0,346346346...$ On sait alors par exemple que $0,63636363... = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$ (NdT).

7. On peut la rendre un peu plus concrète avec de l'argent. Si je paie 8€ pour 27 objets, combien est-ce que je paierais pour cent objets ? (NdT)



La réponse est : $\frac{8}{27} \simeq 0,296$. En arrondissant, on a : $\frac{8}{27} \simeq 0,30$. Et on voit alors que $\frac{8}{27} \simeq 30\%$ (30 pour cent !)

De même : « Quel est le pourcentage de 3 par rapport à 8 ? » On observe que $\frac{3}{8} = 3 \times 0,125 = 0,375$. Donc $\frac{3}{8} = 37,5\%$.

Les pourcentages sont une source inépuisable d'erreurs. On peut éviter la plupart d'entre elles si on fait le lien avec les fractions décimales et que l'on sait s'y prendre avec les fractions décimales.

# 2 Le monde des rapports

## 2.1 Arrière-plan

Le monde est rempli de ce qu'on nomme rapports : on les reconnaît dans les proportions de l'homme et celles de l'animal, dans les formes et les rythmes du monde végétal, dans les structures minérales cristallines. À l'intérieur de la matière elle-même règne la structure : Avogadro découvrit que les éléments se trouvent en relation les uns avec les autres comme de simples nombres entiers (par exemple $H_2O$).
On trouve un exemple éclatant de rapports dans la musique. Alors que l'on peut avoir des avis différents quant au tempo d'un morceau de musique, les rapports à l'intérieur de chaque mesure restent semblables et déterminent le caractère du morceau.
Dès le début, l'enfant est entouré d'un monde empli de rapports, tant extérieurs qu'intérieurs, qui le façonnent d'une manière naturelle et le plus souvent inconsciente.

« Le dimanche au bois, nous recevions notre glace, la traditionnelle Venezia : nos parents, une glace à 5 centimes, nous une glace à 3 centimes, et il ne nous venait pas à l'idée de protester. C'était réglé selon les proportions naturelles de cette époque, les années 30 (rigolo, non ? Presque selon la section dorée). »

Dans les premières années d'école, les élèves ont un sentiment naturel des rapports. Si on demande à un enfant de première classe qu'il répartisse joliment ses 12 marrons sur son pupitre, dans 9 cas sur 10 on trouve 3 marrons à chaque coin. De même dans le dessin de formes : il s'agit d'abord de belles divisions et de beaux rapports, de formes structurées et rythmées.
Faire des approximations, exercice que les enfants font souvent et avec plaisir, a beaucoup à voir avec le développement de leur sentiment pour les rapports et proportions.
Vers la 9e année environ, l'enfant rencontre le monde extérieur de façon plus consciente. Il va voir le monde avec d'autres yeux, et ce qui est vécu est aussi évalué. L'expérience vécue devient représentation, « image mentale ». À partir de cet âge, la capacité de se placer en face des choses se développe de plus en plus. La faculté de jugement se libère de l'expérience directe.

« Il y a peu, deux enfants de quatrième entrèrent avec une liste de marche parrainée. Je signai sans prêter attention pour 2 florins : super, ces deux enfants si actifs ! Mais j'aurais mieux fait d'être plus attentif ! Pour chaque tour qu'ils auraient couru en un quart d'heure autour de la prairie, je devais payer 2 florins. *Donc, si nous faisons 4 tours, vous devrez payer 8 florins, Monsieur*. Et les enfants disparurent en rigolant. »

Un élève de deuxième n'aurait pas vu la situation aussi clairement. À partir de la quatrième, les rapports sont à l'ordre du jour au travers de thématiques diverses, aussi dans le cadre des mesures et nombres.

« Un éléphant mange 325 kilos de légumes par jour ; un rhinocéros en mange 50 kilos. Combien de fois un éléphant mange-t-il plus qu'un rhinocéros ? » Ce sont des faits parlant dont les quatrièmes raffolent. Ce qui, en deuxième et troisième est acquis au marché ou à l'épicerie du quartier et par la connaissance du milieu local, peut maintenant être approché plus consciemment. Les nouveaux sujets, comme les fractions, les mesures décimales et le dessin à l'échelle, peuvent apparaître naturellement comme des expressions de rapports.

Vers 12 ans, l'enfant peut faire un autre pas. En liaison avec nos « gros mangeurs de légumes » ci-dessus, une autre question peut être posée : « Si Jean livre 3 tonnes de légumes pour les deux animaux, combien en reçoit l'éléphant ? » Ici, il faut faire un calcul plus complexe, dans lequel plusieurs opérations sont impliquées. Par exemple : l'éléphant et le rhino mangent 375 kilos de légumes par jour. En combien de jours engloutissent-ils 3 000 kilos ? $\frac{3000}{375} = \frac{6000}{750} = \frac{12000}{1500} = 8$. Ils ont à manger pour 8 jours. L'éléphant en a donc mangé $8 \times 325$ kilos, c'est-à-dire 2 600 kilos. C'est une suite de calculs qui en appelle à ce qu'un élève de sixième peut faire.

Vers 14 ans environ, l'élève peut résoudre le problème sous une forme abstraite plus générale : $\frac{E}{R} = \frac{325}{50} = \frac{13}{2}$. Donc $E$ mange $\frac{13}{15} \times 3\,000$ kilos $= 2\,600$ kilos. Avec cette approche algébrique, on peut résoudre chaque situation de $E$ et $R$ pour la plus grande joie de l'adolescent, qui peut maintenant maîtriser la réalité d'une manière si maline.

En résumé, regarder les rapports et proportions en juste proportion par rapport à l'âge et la totalité du plan scolaire. Et surtout : ne pas viser trop haut !

## 2.2 Rapports et proportions dans l'enseignement traditionnel du calcul

Jusque dans les années 70, les rapports dans l'enseignement du calcul étaient introduits en fin de cinquième et, le plus souvent, seulement en sixième. Les fractions, nombres à virgule et pourcentages avaient déjà été enseignées. Cela paraît incroyable, car le phénomène des rapports se trouve à la base de tous ces sujets.
Alors, pourquoi si tard dans le programme de calcul ? La réponse à cette question devient claire quand on voit quel enseignement était donné. Tout bien considéré, le *phénomène* rapport était rarement pris en compte. Il s'agissait surtout de proportions, c'est-à-dire donc de l'égalité de rapports [8] comme $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$. En plus, on travaillait seulement avec des nombres « purs » et les situations de mesurage n'étaient pas mises en image.

Le chapitre proportions comportait, en principe, quatre sections.
D'abord, une introduction sur la notion et la façon de noter : « La valeur d'un stuiver [9] et d'un dubbeltje sont dans le même rapport que 5 et 10. On peut également dire qu'ils sont l'un à l'autre comme 5 est à 10, ce que l'on écrit 5 : 10. Et c'est la même chose que 1 : 2. Donc stuiver : dubbeltje = 1 : 2. (Un vrai instituteur ajoutait : « C'est naturellement la *valeur* d'un stuiver qui est à la *valeur* d'un dubbeltje, comme

8. En néerlandais le terme « evenredigheid » fait explicitement référence à ces termes « raison » et « égal ».
9. Le *stuiver* et le *dubbeltje* sont des subdivisons de la monnaie hollandaise (NdT).

1 est à 2. ») Ici on peut lire qu'un dubbeltje a deux fois plus de valeur qu'un stuiver. Ou qu'un stuiver vaut la moitié d'un dubbeltje.

Puis venait une section avec des problèmes du genre : « Deux capitaux sont l'un à l'autre comme 3 : 4. Le plus grand capital est un montant de 200 F. Quel est le montant du plus petit capital ? »

La solution se trouvait via une proportion (égalité de rapport) telle que $c : 200 = 3 : 4$. Parfois on utilisait la propriété principale d'une proportion : $4 \times c = 3 \times 200$, donc $c = \frac{600}{4} = 15$. Celui qui voyait que $200 = 50 \times 4$ et donc $c = 50 \times 3$, allait plus vite.

La section suivante traitait de problèmes tels que : « Le nombre de billes de Jean et de Walter sont l'un à l'autre comme 3 : 5. Ensemble ils ont 40 billes. Combien en ont-ils chacun ? »

La solution se déroulait comme suit : « Jean » : « Walter » = 3 : 5. « Jean » + « Walter » = 40. Jean a donc $\frac{3}{8} \times 40 = 15$ billes et Walter en possède $\frac{5}{8} \times 40 = 25$. Le nombre 8 était obtenu en additionnant 3 et 5, et l'on savait cela parce que le nombre total de billes était celui qu'ils avaient ensemble.

Dans la dernière section, le rapport et la différence étaient donnés : « 2 bâtons sont dans le rapport 3 : 8, l'un est plus long que l'autre de 40 cm. Quelle longueur ont les deux bâtons ? »

Solution : bâton A $= \frac{3}{5} \times 40$ cm $= 24$ cm. L'autre a donc 64 cm (les calculateurs « routiniers » trouvaient cela via $\frac{8}{5} \times 40$ cm $= 64$ cm).

Dans les années 50, la didactique des rapports et proportions fut enrichie par les tableaux de proportionnalité. Grâce cela, les trois types de problèmes pouvaient être résolus en un tournemain. La proportion $a : b = 3 : 6$ était placée dans un schéma :

| $a$ | $b$ |
|---|---|
| 3 | 6 |

ou

| $a$ | 3 |
|---|---|
| $b$ | 6 |

En regardant comment passer de $a$ à $b$, on voit aussi ce qui mène de 3 à 6. C'est un facteur de multiplication par 2. On trouve $b$ en multipliant $a$ par 2.

Si par exemple $B - A = 40$, comme dans le problème des deux bâtons, alors on élargit le schéma en pensée :

| $A$ | $B$ | $B - A = 40$ |
|---|---|---|
| 3 | 8 | $8 - 3 = 5$ |

Le facteur de multiplication est donc 8 puisque $40 = 8 \times 5$. On voit ainsi que ce qui permet de passer de la ligne inférieure à la ligne supérieure est une multiplication par 8. Il en découle directement que $A = 8 \times 3$ et $B = 8 \times 8$.

Dans ce livre, nous avons aussi rencontré le tableau de proportionnalité [10] au chapitre sur les fractions. Avec cela, il est clair que l'introduction des rapports dans l'enseignement du calcul avant les fractions, donc avant la quatrième, mérite notre attention.

## 2.3 Les enfants rencontrent les rapports

*Observation :* le coq sur le clocher.

Avec quelques petits devant le clocher, je pose la question :

— Est-ce que quelqu'un peut me dire quelle est la grandeur du coq sur le clocher ?

10. Ce tableau de proportionnalité est apparenté à « la matrice de proportionnalité » qui fut introduite par le didacticien P.M. van Hiele.

— Je sais.

— À peu près aussi grand ? Qu'est-ce que tu en penses ?

— Il est encore beaucoup plus grand.

— J'ai vu dernièrement qu'ils avaient descendu le coq qui était un peu dégarni et avait besoin d'être repeint. Le coq était donc au sol. Ici, tout près. Qu'en penses-tu ? Quelle était la taille du coq ici ?

— À peu près comme ceci. Un poulet n'est quand même pas aussi grand !

— Non, pas un vrai poulet. Mais est-ce un vrai poulet ?

— Non

— C'est un petit coq en fer. Quelle est la grandeur d'un avion dans le ciel ?

— Il est tout petit… Je sais, aussi grand que la cour de récréation.…

— Pensons encore au coq. Quelle grandeur avait-il sur le clocher ? Et quelle grandeur ici sur le sol ?

— Plus grand, encore plus grand.

— Et si j'allais sur le clocher , quelle grandeur j'aurais ?

— Un tout petit homme.

— Maintenant j'emmène le coq avec moi en haut, et je deviens de plus en plus petit.

— Je ne vois pas de coq.

— Maintenant dis-moi quelle grandeur j'ai quand tu me vois en haut du clocher ?…

— Un tout petit homme.

— Et le coq à côté de moi ?

— Aussi petit.

— Maintenant nous descendons tous les deux. J'ai emporté le coq. Quelle grandeur a le coq ?

— Alors le coq est aussi grand qu'un banc d'école [11]…

> Doit-on poser une telle question à un petit du jardin d'enfants ? Peut-être plutôt aux élèves de quatrième, en route vers la grande église pour gravir les marches du clocher et observer la ville à vue d'oiseau.

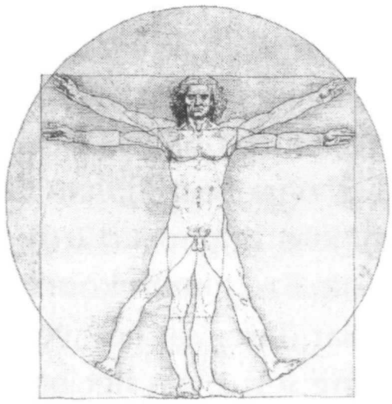
*Observation :* Bastien et les nuages de pluie.
Bastien (7 ;6). Après quelques jours de soleil, il voit des nuages et dit : « Il va pleuvoir. » « Non, dis-je, ce sont de très hauts nuages, ils ne donnent pas de pluie ; les nuages de pluie sont bas et sombres. » Lui : « Et à quelle hauteur sont ces nuages de pluie ? » Moi : « 1 000 mètres. » Lui : « Donc (avec la main par terre) si nous sommes ici et le nuage de pluie aussi haut (il montre environ 30 cm au-dessus du sol), alors ceux-là (il montre environ 1 m au-dessus du sol) ne sont pas des nuages de pluie [12]. »

Il semble bien que le phénomène des rapports ne passe pas inaperçu des enfants. Ils le sentent intuitivement et peuvent l'exprimer par des gestes et des mots. Mais ils peuvent aussi être trompés par les circonstances. De toute façon, le monde qui les entoure, et les enfants eux-mêmes, nous donnent l'occasion de ne pas laisser de côté les rapports et proportions.

11. Tiré de Goffree, F. [1979], *Leren onderwijzen met wiskobas*, IOWO, Utrecht.
12. Cité dans *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het rekenwiskundeonderwijs*, jrg. 8 nr. 2, blz. 57.

## 2.4 Le phénomène des rapports

Le monde est plein de rapports visuels, numériques, géométriques, inaperçus ou attirant l'attention, qui accentuent ceci ou cela et dévoilent des différences. Celui qui regarde autour de lui avec des lunettes de rapports ne peut pas contredire cette affirmation.
Ce qui frappe directement, ce sont les choses dont on dit qu'elles sont disproportionnées, par exemple une caricature dans laquelle des traits caractéristiques sont disproportionnés. La planche d'anatomie du corps humain dans ses différents stades de développement attire aussi l'attention sur les rapports : est-ce que la tête du bébé n'est pas beaucoup plus grande que celle de l'adulte plus loin dans la rangée ? Naturellement pas dans l'absolu, mais bien « par rapport ». Qui y fait particulièrement attention ? Le peintre, qui veut dessiner un jeune enfant ! Ce même peintre en sait beaucoup plus long sur les rapports du corps humain. La belle planche suivante fut dessinée par Leonard de Vinci :



Il y a des rapports qui sont importants, alors même qu'on n'y prête pas attention. Beaucoup de rapports simples passent complètement inaperçus. Prenons les photos de vacances, où les gens, animaux et choses apparaissent beaucoup plus petits qu'ils ne sont en réalité. Personne n'en fera la remarque, parce que tous sont proportionnellement plus petits. Et n'est-ce pas valable pour ce que l'institutrice ou le maître écrit au tableau ? Ce dessin de formes d'un mètre paraît un décimètre au fond de la classe, et en s'approchant grandit à vingt centimètres, aucun enfant ou professeur ne s'en préoccupe. Et les diapositives, ou peut-être les transparents sur le projecteur : agrandissements et diminutions de la réalité. Celui qui regarde la diapositive éclairée par derrière pense voir « la même chose » que ce qui est projeté sur l'écran ! Nous y sommes habitués et, aussi longtemps qu'on n'y prête pas attention, le phénomène ne nous frappe pas.

Quand utilisons-nous les rapports ? On en parle déjà au moment où les enfants s'orientent dans l'espace physique. Lorsqu'ils font des appréciations, par exemple : « Qu'est-ce qui est le plus loin à partir de la table de la classe, la porte du local ou l'armoire, là-bas derrière ? » « Mesurons avec des pas. » Ou lorsque les enfants font un puzzle. Une petite question en passant peut attirer l'attention : « Quelle grandeur aura le puzzle ? » La réponse peut être globale, et donnée ne fût-ce que sous forme de geste, comme Bastien le fit avec les nuages de pluie. Mais cela peut aussi se faire de façon précise, quand les enfants ont appris à mesurer.
Les photos, où les rapports passent inaperçus, sont une bonne occasion pour faire des estimations et par conséquent pour utiliser le phénomène des rapports.

« Quelle hauteur a l'arbre ? Je pense que l'enfant le plus grand mesure 1 m 55. Alors l'arbre mesure, disons … »

Celui qui évalue cherche un matériel de comparaison. On dit aussi : des points de référence. Chaque personne construit durant sa vie un répertoire personnel de mesures référentielles. Je mesure 1 m 69 et donc j'évalue la hauteur de cette planche de cuisine à environ 1 m 85. Cette poutre a environ 2,5 cm d'épaisseur, je le vois en y mettant mon pouce. Ce broc contient environ 2 décilitres, donc je peux facilement mesurer un demi-litre : 2 broc et demi. Et dans mon livre de cuisine, je trouve qu'une cuiller à café contient 3 grammes. Et alors ça fait…

Ce dernier exemple reviendra plus tard lorsqu'on parlera de densité (densité de masse, que l'on nomme aussi poids spécifique). C'est le rapport entre poids et volume ; autrement dit, le poids d'une certaine quantité de matière. Combien de kilos pèse 1 $dm^3$ de plomb ? Ou, comme on le dit actuellement, quelle est la masse de 1 $dm^3$ de plomb ?

La densité de la population aussi (rapport entre le nombre d'habitants et la superficie du pays).

Avec cette problématique des rapports, nous avons traversé trop rapidement le monde des rapports. Nous n'avons pas parlé des agrandissements des photos et des photocopies (les agrandissements des photocopieurs sont exprimés actuellement en pourcentage). Et le travail avec les cartes géographiques et les plans de ville, où la notion d'échelle est essentielle. Aussi bien numériquement (échelle 1 : 10 000 par exemple) que géométriquement (cette ligne —– représente 1 km). Nous n'avons pas non plus parlé de la construction de modèles, des jouets à l'échelle, ou *madurodam* à l'échelle 1 : 25. Il y a aussi la projection de Mercator, où le Groenland est montré proportionnellement trop grand.

Et que dire des rapports qui accompagnent les ombres ? L'ombre du mât était plus longue à 5 heures qu'à midi. Que dit cette longueur de la hauteur du soleil, et donc de l'heure ? Plus tard, en dixième, on y reviendra avec les rapports trigonométriques.

Cela, c'est de la géométrie. Mais c'est aussi valable pour le phénomène des teintes de gris sur papier (ou sur un écran d'ordinateur). L'impression « grise » naît d'un mélange de petits points blancs et noirs. Le rapport « blanc : noir » détermine le foncé du gris :

10 % de noir 

50 % de noir 

Les mélanges sont aussi déterminés par les rapports. Les enfants en ont l'expérience avec le sirop dans l'eau, peut-être pas selon un rapport exact, mais certainement de manière intuitive.
Le travail de calcul devient vraiment plus difficile lorsqu'on aborde le terrain de la chimie. Là, les dilutions doivent se faire de façon précise selon la prescription. Les rapports du système métrique (« Combien de centimètres cubes y a-t-il dans un millilitre ? ») sont abordés. Et comment se calcule le rapport entre km/h et mètre par seconde ou le mile/heure anglo-saxon (nœud) ?
Convertir se fait aussi en voyage, par exemple aux USA. On échange des euros contre des dollars selon un rapport déterminé (cours du change), et celui qui connaît les prix à l'étranger peut faire ses courses en faisant le change mentalement.

Même avec ce qui vient d'être dit, le phénomène est encore loin d'être épuisé. Ainsi, le rapport qualité/prix, le prix au poids, le prix au mètre et autres, l'inflation et le pouvoir d'achat, l'index, le quotient électoral… Un professeur qui perçoit bien le sujet ne doit pas chercher bien loin. Et lorsqu'il voit plus loin que l'école primaire, des sujets comme la linéarité, les formules et les graphiques, apparaissent à l'horizon.

## 2.5 Les rapports dans le plan scolaire

Il n'est pas possible de donner un plan scolaire complet pour les rapports. C'est clair, en voyant ce qui vient d'être dit de ce thème. Les rapports doivent être pris en considération dans le cadre de beaucoup d'autres sujets. Cela comporte un danger, à savoir que le sujet tombe dans l'oubli. Il n'est pas possible de suivre minutieusement un plan scolaire précis, comme dans le cas des tables de multiplication et des algorithmes de calcul. Chaque professeur choisit les sujets en fonction de sa classe et les introduit ensuite dans d'autres contextes.
Globalement, on peut considérer la ligne directrice suivante : les rapports ne forment pas en eux-mêmes un enseignement explicite durant les trois premières années. On peut toutefois en jeter les bases au moyen des estimations et du dessin de formes. En quatrième, la pensée en fractions donne une bonne base pour les tableaux de proportionnalité, qui permettent de travailler les problèmes de rapports et proportions de manière pratique. Ainsi les rapports apparaissent-ils comme des mesures relatives (par rapport à).
La dernière étape trouve sa place dans les plus grandes classes, où est étudiée la double ligne de nombres et l'emploi des tableaux de proportionnalité. Ces tableaux permettent aussi de résoudre les problèmes de rapports et proportions de manière algorithmique. Par un choix bien pensé, le sujet rapports peut être travaillé à fond durant les huit années. Jusqu'aux applications à l'intérieur et à l'extérieur des mathématiques, jusqu'à et avec les fonctions linéaires et comme une bonne base pour le domaine des fonctions puissances et exponentielles.

Voici maintenant des suggestions pour aborder le sujet dans toutes les leçons et périodes.

#### 1. Dessin de formes

Ce qui est dessiné au tableau est reproduit « proportionnellement » sur sa propre feuille de papier.

#### 2. Mesures élémentaires

Ici, ce sont des grandeurs naturelles qui sont comparées souvent avec l'aide de son propre corps comme instrument de mesure. Les résultats des mesures sont des nombres indiquant des rapports.

**3. Évaluer avec des mesures de références**

Dans la vie de tous les jours, mais aussi sur des photos et des illustrations. C'est une vraie fête lorsque les enfants peuvent faire des estimations. Beaucoup de réponses apparaissent au tableau. Ils cherchent à se conforter l'un l'autre : « Est-ce que je suis tout à fait à côté de la plaque ou Johan l'a-t-il estimé trop grand ? » Ensuite quelqu'un peut le mesurer. En retenant son souffle, la classe attend, jusqu'à ce que le mesureur arrive avec la réponse juste, et la jubilation éclate lorsque quelqu'un a trouvé la bonne valeur.

Le boulanger avait prêté à l'école une vieille balance avec de gros poids. Nous avions justement commencé la période de construction et un premier sac de ciment était dans le couloir. J'ai demandé à un enfant d'aller le chercher et de le déposer sur la balance. Puis je lui ai donné un poids et lui ai demandé : « Combien de ces poids dois-je déposer sur l'autre plateau de la balance ? » Ensuite nous avons essayé avec des poids plus grands et plus petits.

C'est ainsi que, jusque dans les plus grandes classes, on peut stimuler un sentiment pour les rapports au travers des estimations.

**4. Troc**

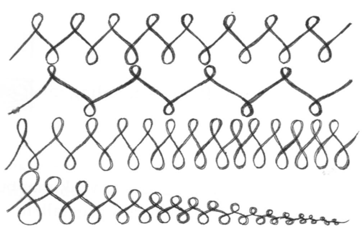
Chez les enfants, cela commence à la cour de récréation avec leurs billes. Il y a des rapports fixes entre petites et grosses billes. Calculer avec des billes est le meilleur moyen d'aborder le troc. Mais à un certain moment, les listes de courses arrivent en classe…

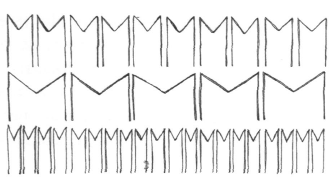
**5. Agrandir et diminuer**

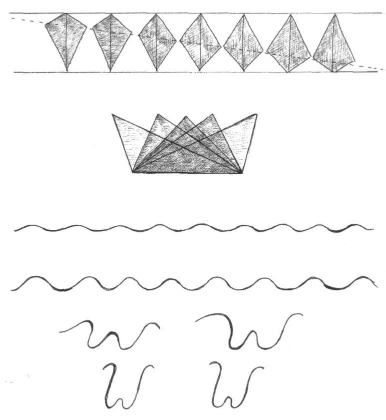
Avec des feuilles de papier quadrillé et un rétro-projecteur.
Construire un patron, faire un plan du sol de la classe, faire un dessin du chemin de la maison jusqu'à l'école, en plaçant des points caractéristiques aux justes places.
Sur un rétro-projecteur, il y a trois pièces de monnaie. Sur l'écran on voit trois cercles noirs. Quelle monnaie est-ce ? La réponse est plus facile quand une des trois pièces est identifiée comme un « dubbeltje ». Comment pouvons-nous en être certains ?

**6. Déformer**

À l'aide de papier quadrillé : d'un papier quadrillé carré à un papier quadrillé rectangulaire. Élargir en longueur ou en largeur. Les proportions ne sont pas conservées.



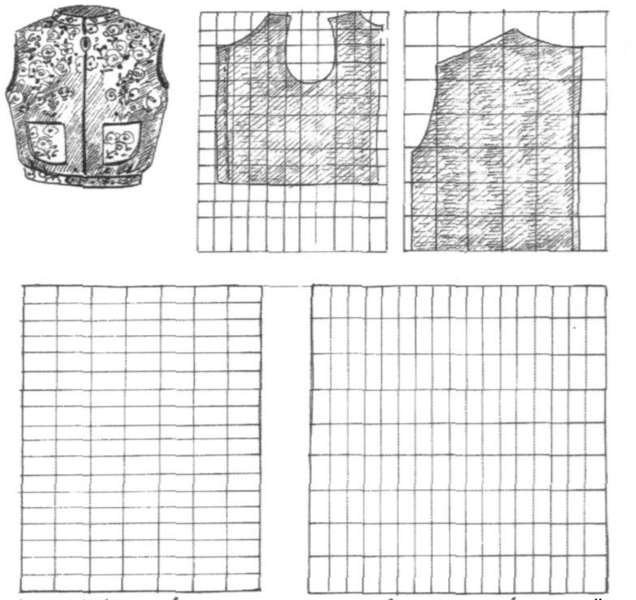




Dans le cours de travaux manuels de la septième classe, les enfants font des agrandissements et des diminutions à l'aide d'un quadrillage. Sans doute ont-ils déjà agrandi la carte de l'empire romain, mais cela devient plus intéressant lorsqu'il s'agit de l'ajustement d'un vêtement.

Dans les classes précédentes, les enfants faisaient des patrons pour des gants, des animaux en peluche ou des pantoufles, par exemple en contournant le pied et en coupant ensuite le tissu un peu plus grand. Maintenant, en septième, on dessine le patron d'une blouse. Pour avoir la mesure exacte d'une blouse ou d'une veste, les enfants déterminent les rapports entre les patrons et leur corps. Le mesurage du corps et du patron donne le facteur d'agrandissement qui lui-même détermine comment l'agrandissement des carreaux du quadrillage doit se faire.

À cela s'ajoute la question de savoir si le vêtement doit être plus long ou plus large que le patron ne l'indique. Cela demande des changements (déformations) où les rapports sont modifiés. Comment reportons-nous les transformations sur le papier quadrillé ?

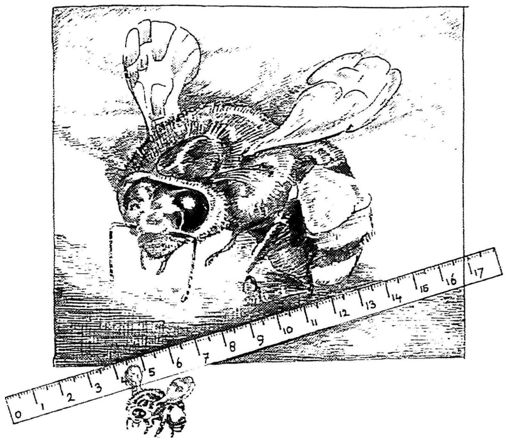



élargir allonger

Et d'un autre point de vue, arrivent des questions comme celles-ci par exemple : « Qu'est-ce qui se passe avec ces caricatures ? » « Est-ce que la tête de ce bébé n'est pas dessinée trop petite ? » « De quelle longueur doit-on dessiner les bras d'un être humain ? »

**7. Trouver une l'échelle**

Une photo d'abeille est donnée. L'image de l'abeille est beaucoup plus grande que l'abeille en réalité. On peut le voir en mesurant avec une règle.



On voit que c'est un agrandissement. Qui connaît la grandeur réelle de l'abeille ?
Avec la photocopieuse, on peut également agrandir ou diminuer. Que signifie un agrandissement de 125 % ? Essayez.

**8. Échelle**

Fais un croquis de ta chambre à l'échelle. Quelle est l'échelle adoptée ? Cela réussit-il avec 1 : 10 ? Quelle est l'échelle utilisée pour le plan de la ville ? Que signifie l'échelle visuelle où une ligne de 1,5 cm représente 1 km ? Que signifie l'échelle de 1 : 100 000 ? Connais-tu une échelle plus grande ? Sais-tu ce qu'est un curvimètre ? Comment fonctionne-t-il avec les échelles ?

**9. Arrondir en étant attentif aux erreurs relatives**

Arrondir se fait à l'intérieur de certaines limites. Jusqu'où allons-nous avec la partie décimale de $\frac{100}{3}$ lorsqu'il s'agit de scier une planche d'un mètre en trois parties égales ? Quelle est l'approximation la plus juste : $7,8 \simeq 8$ ou $97,8 \simeq 100$ ?

**10. Problèmes variés**

D'après le fabricant, cette bougie a une durée de vie de 10 heures. Combien de temps aurait-elle déjà brûlé ? Ce panneau indicateur doit avoir été placé sur le chemin, quelque part entre Driebergen et Arnhem. Où précisément ? Comment pouvons-nous faire un « modèle à l'échelle » de la terre, de la lune et du soleil ? Pouvons-nous aussi dessiner à l'échelle la taille des planètes ? Explique pourquoi le soleil et la lune paraissent avoir la même grandeur dans le ciel ? Connais-tu une manière de contrôler l'exactitude du compteur de vitesse dans la voiture de ton père (ou de quelqu'un d'autre) ? Peux-tu calculer combien vaut dans le monde réel la distance de 12 cm sur une carte à l'échelle de 1 : 100 000 ?

**11. Ombre d'un bâton**

Dresse un bâton d'1 mètre de hauteur dans la cour de l'école et mesure à des moments précis la longueur de l'ombre. Utilise le rapport bâton-ombre pour trouver la hauteur d'un arbre, d'une cloison, d'une haie, d'un mur ou de quelque chose d'autre dans les environs. Trouve les triangles qui ont la même forme quand tu mesures comme cela ?

### 12. Densité et mélanges

« Papa, viens voir, ce buisson est plein de myrtilles, il est tout à fait bleu, on ne voit presque plus les feuilles ! » Nous accourons tous. Peut-être trouvera-t-on encore d'autres buissons comme celui-là à cet endroit fantastique que Bride a repéré. » « Bah, quel petit buisson ! » proteste Jannes, mon autre rejeton, « Le mien n'est peut-être pas aussi bleu, on voit plus de feuilles, mais il a beaucoup plus de myrtilles ! Je retourne. » « Ce n'est pas possible », dit Bride, « je n'ai jamais vu un buisson aussi rempli ».

Qui a raison ? Dans l'absolu, il y a peut-être plus de myrtilles dans le buisson de Jannes, mais proportionnellement, en regardant les choses de manière relative, il y en a moins. Proportionnellement… en proportion de quoi ? Relativement à quoi ? Si le buisson de Jannes était aussi petit que celui de Bride, alors il y aurait moins de myrtilles. Pour donner raison à Bride, il faut imaginer que les buissons ont la même taille, tout en leur laissant leur teinte bleutée d'origine. Cette teinte donne la proportion entre les myrtilles et les feuilles.

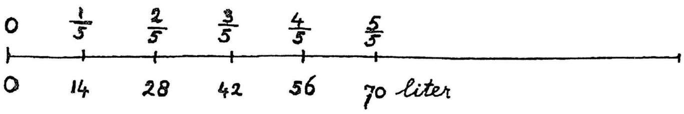
### 13. Rapports dans les fractions

Regardez le chapitre 5 [13] et pensez à l'introduction de la double ligne de nombres. L'élastique des fractions est aussi basé sur les rapports.

Voici quelques problèmes « en passant ». Ils apparaissent aussi comme des problèmes de rapports et proportions.

* La recette de … est prévue pour 4 personnes et on attend 9 invités…
* Mon appartement est une fois et demi plus haut que celui d'en face qui se trouve à 20 m de hauteur. Quelle est la hauteur du mien ?
* Le père de Brandan voit sur son tableau de bord que le réservoir d'essence n'est rempli qu'à peu près à $\frac{2}{5}$. Il y a 70 litres dans un réservoir plein. Mais il y a encore beaucoup de kilomètres avant d'arriver chez lui. Combien de litre se rest-t-il à peu près dans le réservoir ?

  Ce problème peut être très bien résolu avec l'aide d'une double ligne de nombres.




### 14. Introduction et exploration des tableaux de proportionnalité

Cela commence en fait avec les tables de multiplication. Par exemple la suite 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21... est reliée à la suite 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... On peut placer les deux suites dans un beau schéma :

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | .... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | .... |

On obtient ainsi un tableau de proportionnalité, avec de nombreuses propriétés à explorer. Par exemple, dans la rangée supérieure $1 + 4 = 5$, la ligne inférieure donne également une addition correcte : $3 + 12 = 15$.

13. Une nouvelle perspective en quatrième : les fractions.

Logiquement, on dira plus tard que tous les nombres ont augmenté de manière proportionnelle (facteur de proportionnalité 3).

Dans les leçons sur les fractions, en cinquième classe, le tableau de proportionnalité est présenté en détail. Là, on constate aussi qu'une fraction présente toujours une relation impliquant une partie (numérateur) et un tout (dénominateur).

Les enfants peuvent également expérimenter l'aspect « relatif » des nombres dans le contexte des rapports lorsqu'ils traitent des fractions équivalentes. L'élastique des nombres (voir le chapitre 5 [14]), en est une bonne démonstration. Nous n'avons pas besoin de les sensibiliser en termes abstraits, mais ils pratiquent cela dans les suites d'égalités :

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots\ldots$ en $\frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \ldots\ldots$ en $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \ldots\ldots$

of in tabel vorm : *ou sous forme de tableau :*

| 3 | 6 | 9 | .... |
|---|---|---|---|
| 4 | 8 | 12 | .... |

Le tableau de proportionnalité peut être regardé comme un schéma de présentation (pour présenter les proportions) et comme un schéma de calcul (pour calculer avec des proportions) pour résoudre des problèmes de rapports. Avec cela, nous pouvons maintenant aborder différents problèmes [15] :

* Combien de quarts dans 13 florins ?

| *florins* ~~guldens~~ | 1 | 2 | 3 | 10 | 13 | (= 10 + 3) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| kwartjes | 4 | 8 | 12 | 40 | 52 | (= 40 + 12) |

* Si 1 franc français vaut environ 32 cents, combien de florins obtiendriez-vous environ pour 250 francs ?

| $f$ | 0,32 | 0,96 | *environ* ongeveer | 1 | 100 | 50 | 200 | 250 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frs | 1 | 3 | ietsje meer dan *un peu plus que* | 3 | 300 | 150 | 600 | 750 |

L'approximation laisse tomber 0,12 francs. On peut donc le faire comme cela.

* Si 0,25 % d'un montant vaut 70 florins, quel est le montant total?

| % | 0,25 | 25 | 100 |
|---|---|---|---|
| *montant* bedrag | 70 | 7000 | 28000 |

Les pourcentages peuvent ainsi être perçus comme des rapports normalisés à 100 (au lieu de 1 : 4, on dit 25 : 100 ou 25 %).

* Nous achetons de la marchandise pour 12 500 florins. Nous voulons faire 8 % de bénéfice. Quel doit être le prix de vente ?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Achat* | Inkoop | 100 % | $f$ 125 | $f$ 12.500 |
| *Bénéfice* | Winst | 8 % | $f$ 10,– | $f$ 1.000 |
| *Vente* | Verkoop | 108 % | $f$ 135,– | $f$ 13.500 |

Dans cet exemple, nous voyons qu'à partir du rapport (achat : bénéfice) un nouveau rapport (achat : vente) en additionnant (et en utilisant d'autres opérations de base). Le tableau de proportionnalité rend ce calcul abordable.

14. Une nouvelle perspective en quatrième : les fractions.
15. Ces problèmes sont bien sûr à adapter à la réalité monétaire actuelle.

#### 15. Rapports et pourcentages

Les pourcentages sont des rapports qui présentent cette particularité que le rapport se fait avec le nombre 100 (voir aussi la section 6.3) [16]. Cela facilite la comparaison de deux ou plusieurs rapports inégaux. Quel est le gris le plus foncé : 17 points blancs pour 19 noirs, ou 33 blancs pour 37 noirs ? Dans le premier cas, il y a 17 points blancs sur un total de 36 points, dans le deuxième cas, il y a 33 points blancs sur un total de 70. Combien de pourcents cela fait-il ?
17 sur 36, c'est ($17 : 36 = 0,4722222\ldots \simeq 0,472 = \frac{472}{1000} =$) environ 47,2 %.
et 33 sur 70 c'est ($33 : 70 = 0,4714285\ldots \simeq 0,471 = \frac{471}{1000} =$) environ 47,1 % !

#### 16. Calcul littéral dans le cadre des rapports

On considère deux triangles semblables, l'un avec les côtés $p = 5,0$ ; $q = 5,5$ ; $r = 7,5$, et l'autre avec les côtés $a$, $b$ et $c$.
On sait que $a = 10,0$. Calcule $b$ et $c$. Cet exercice se résout facilement à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

#### 17. A la recherche du nombre $\pi$

Cela tourne autour du rapport constant entre la circonférence d'un cercle et son diamètre (ou son rayon). On peut laisser les enfants mesurer ce phénomène extraordinaire avec toutes sortes de figures circulaires : écu, assiette, tasse, lampadaire… On reporte alors les données en un beau tableau et l'on fait calculer les rapports (le quotient, le résultat d'une division). On calcule le rapport jusque après la virgule. Qui peut imaginer une formule pour la circonférence de n'importe quel cercle ?
Existerait-il une formule pour l'aire d'un disque ?

#### 18. Les rapports linéaires en formules

Voir plus tard (en septième classe ; cf. le chapitre 7) [17].

## 3 Pourcentages

[Non traduit à ce jour]

## 4 Géométrie

[Non traduit à ce jour]

16. Sur les pourcentages. Non encore traduite (1er octobre 2017).
17. *Le calcul et les mathématiques en 7e et 8e classes.*