Une nouvelle perspective en quatrième : les fractions

Traduction du cinquième chapitre du livre *Rekenen in beweging*

Version du 26 septembre 2016

Éditeur : Reklamestudio Kees Kuiphof bNO, Ede.

Auteurs : Kees van Broekhuizen, Fred Goffree, Frank de Kiefte, Jan Kraamwinkel, Peter Landweer, Paul van Meurs, Job de Raadt, Kees Verhage, Pieter Witvliet, Annemieke Zwart.

Traduction : Luc Lismont, avec la collaboration de Christiane Fontaine. Toutes les remarques permettant d'améliorer cette traduction (style, orthographe, passage peu clair ou incompréhensible…) sont les bienvenues. Merci de les communiquer à Luc Lismont.

1 Les arrière-plans anthropologiques

Aux alentours de sa neuvième année, l'enfant développe un autre rapport au monde. C'est un regard plus éveillé qui vient à notre rencontre ; il se pose des questions au sujet du « pourquoi » de toutes sortes de choses, devant lesquelles il était passé avec insouciance auparavant. Son « vécu du Moi » se renforce également parce qu'il peut prendre plus de distance vis à vis du monde et qu'il va, grâce à cela, le considérer et le comprendre dans sa multiplicité. En introduisant le calcul des fractions d'une manière aussi vivante et claire que possible, en commençant par rompre et partager des totalités – et on s'adresse ainsi au besoin naturel d'analyser –, on utilise les facultés qui se développent chez les enfants et leur permettent de se relier au monde par la représentation.
La perception nouvelle de l'environnement dans cette phase de la vie conduit souvent à une insécurité et à un doute intérieur. Les enfants remarquent maintenant plus clairement les différences mutuelles : qui sait bien dessiner, qui sait bien calculer, etc. Ils vont regarder leur propre travail d'avantage en relation avec celui des autres. L'acquisition d'une confiance en leurs propres moyens et en leur propre travail, en comparaison avec celui de leurs compagnons de classe, suit un chemin qui demande, à partir de cet âge, plus d'attention individuelle de la part du professeur. Devant lui, la classe devient de plus en plus une totalité constituées de parties (originales). Du point de vue méthodologique et didactique, cet état de fait provoque aussi des changements.

La disposition d'âme de l'enfant de neuf-dix ans, c'est l'unité rompue. L'unité rompue est également caractéristique du calcul des fractions. L'enfant devra y reconstruire des unités nouvelles, des totalités nouvelles. Dans ce domaine de beauté, de multiplicité et de surprise, où des failles apparaissent dans la régularité du monde, les enfants peuvent faire de grandes découvertes, mais tout aussi bien passer de mauvais quarts d'heure. Ils peuvent engager leur besoin de mouvement et leur créativité de bien des manières afin de trouver l'accès à ce nouveau monde de calcul. Ainsi, la matière soutient de manière significative le développement de l'enfant.

2 Piste didactique

Durant la première période sur les fractions, on travaille avant tout à partir d'un point vue anthropologique. Au cours des périodes suivantes, on peut suivre une piste didactique enrichie d'expériences de calculs concrets. Cette façon de procéder permet aux enfants de prendre pied dans ce nouvel univers de calcul. Des situations connues et des contextes familiers forment le point de départ pour fractionner et apprendre à connaître les symboles correspondants. Dans le langage des fractions, de nouveaux symboles numériques font leur apparition, dont les numérateurs et les dénominateurs. On y introduit des modèles pour les situations de partage et de division que les élèves explorent et utilisent. On jette ainsi un pont entre les méthodes informelles et les structures formelles de ce domaine. Dans une didactique réaliste, on part de la manière naturelle qu'ont les enfants d'aborder les choses ; on laisse ensuite largement la place à des interactions grâce auxquelles leurs idées personnelles sont mises à l'épreuve et affinées. Il est fécond de ne pas orienter trop rapidement le travail vers les règles de calcul (algorithmes), mais d'attendre que les enfants soient capables d'en (re)construire eux-mêmes une grande partie, grâce à leurs propres forces.

Durant les trois premières années d'école, les enfants amassent beaucoup d'expériences de calcul. De ce fait, ils peuvent aussi rencontrer des fractions. Mais ces fractions ne sont pas encore vécues vraiment consciemment. C'est en quatrième qu'arrive le moment où l'enfant est mûr pour cela. Pour pouvoir déterminer si la classe – ou du moins une partie de la classe – est sur le point de l'être, il est particulièrement judicieux d'examiner si la matière des trois premières années est suffisamment maîtrisée. Pour le dire autrement, le concept de fraction peut passer au-dessus de la tête d'un enfant s'il ne se sent pas suffisamment à l'aise avec les nombres naturels. Il est donc bon, lors de l'introduction des fractions en quatrième, de réviser la matière des années précédentes. De ce point de vue, il n'y a pas d'enseignement préparatoire aux fractions dans le sens d'un processus de prise de conscience ; mais les enfants amassent en quatrième des expériences qui pourront ensuite soutenir la bonne compréhension de cette matière. Il est important que, dès la première prise de contact avec les fractions, les fractions soient constamment mêlées à d'autres calculs. Ainsi la connaissance acquise à propos de « rompre », « partager » et « dénommer » pourra être utilisée dans la période de calcul centrée sur la « mesure avec des mesures ». Le calcul formel est préparé en cinquième classe, et c'est seulement en sixième qu'il est exercé entièrement dans le contexte mathématique des nombres et des règles de calcul. Des enfants qui, à ce moment-là, n'y sont pas encore prêts pourront, avec l'approche réalisée entre-temps et avec le modèle de la double ligne des nombres et des tableaux de proportionnalité, quand même effectuer la plupart des calculs. Les fractions sont alors intégrées dans d'autres thèmes qui occupent les élèves durant les périodes ou les heures d'exercices de calcul. En septième, fractions et les nombres négatifs sont intégrés au moyen de la ligne des nombres à l'ensemble des nombres rationnels (entiers, zéro, nombres fractionnaires, nombres négatifs). Maintenant, les fractions trouvent leur place au sein de l'algèbre qui se développe à partir du calcul avec les nombres.

Globalement, l'enseignement des fractions en périodes (dans les quatrième, cinquième, sixième et septième classes) peut suivre le déroulement suivant :

- Découvrir les fractions (unitaires) et les nommer dans toutes sortes de situations concrètes de partage et rupture.
- Le mouvement, nommer le mouvement, imager le mouvement, travailler avec des images (qui sont des modèle du « de »), choisir des images pour résoudre des applications, considérer les images comme des « modèles ». Une attention particulière pour le choix des grandeurs médiatrices pour les fractions.
- Travailler avec le « modèle mère » pour le calcul des fractions : une double ligne de nombres muette, puis aussi les tableaux de proportionnalité.
- Calcul technique avec des fractions formelles ; aperçu de la structure mathématique des nombres rationnels.

Le parcours de l'enseignement des fractions est ainsi comparable à celui du monde des nombres naturels et aux compétences de base dans les trois premières classes.

3 Curriculum global de la quatrième à la septième

La quatrième classe

Durant cette année, la rencontre avec le phénomène de la fraction unitaire (dont le dénominateur vaut 1) est centrale. Des situations de partage de quantités, de grandeurs et de figures géométriques conduisent à l'acquisition du langage des fractions avec les symboles appropriés. Des partages comme actions (distribuer à la ronde, partager, diviser) et comme résultats (petits groupes, quotients, décomposition) sont décrits dans ce nouveau langage. Ainsi apparaissent par exemple des suites qui naissent par division en 2 d'une unité ($\frac{1}{2}$ jusque $\frac{1}{16}$). Après cela, également une suite « mélangée » ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$), éventuellement complétée avec $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{10}$. Des productions personnelles (trouver soi-même des exercices à faire, se saisir d'un problème, chercher des solutions, des présentations, des explications…) rendent possibles des découvertes créatives de nature calculatoire et géométrique. Si on le souhaite, tout peut se jouer dans le monde des fractions unitaires.

Les enfants vont ainsi en reconnaissance dans le nouvel univers des fractions, de la manière dont, au cours des leçons des choses, ils vont aussi à la rencontre du monde autour d'eux. On consacre une attention de plus en plus consciente au langage des fractions ; les enfants apprennent à s'en servir comme d'une manière de décrire les actions telles que rompre, partager, plier, mélanger... Les résultats de ces actions (rompre, partager, etc) sont également décrits ainsi. En mettant différentes parties en relation les unes avec les autres, en les prenant ensemble, en déterminant la différence ou « ce qui manque », on met également les opérations principales en images.
Dans tous les cas, on fait d'abord ce qui sera écrit par la suite. En aucun cas, un calcul avec des nombres « purs » n'introduit l'étape suivante du processus d'apprentissage.
L'essence de ce travail est de mettre l'accent sur la découverte du phénomène « fractions » et sur l'acquisition de la gamme d'expériences la plus large possible.
Voici quelque idées pour préparer cette période :

1. Découvrir des fractions naturelles, en partant des fractions unitaires qui apparaissent dès que l'on fractionne et que l'on partage.
2. Explorer de manière concrète le partage d'unités géométriques : des cercles, rectangles, triangle, bandes (règles) etc.
3. Nommer les parties fractionnées de ces unités géométriques.
4. Découvrir la fraction en tant qu'opérateur.
5. Bouger et compter avec des fractions. Découvertes de suites de fractions, aussi avant 1.[?] ?
6. Regard rétrospectif sur la première période au sujet des fractions. Réaliser des « enveloppes de fractions » avec des cercles et des bandes.
7. Productions personnelles avec l'aide de l'enveloppe de fractions ; premiers problèmes.
8. Examiner et comparer des fractions par estimation.
9. Imaginer et résoudre des problèmes.

Finalement, faites participer les enfants à une « leçon-test » un matin de période où, en tant que professeur, vous pouvez percevoir pendant le travail quel est le répertoire que s'est approprié chaque enfant au sujet des fractions.

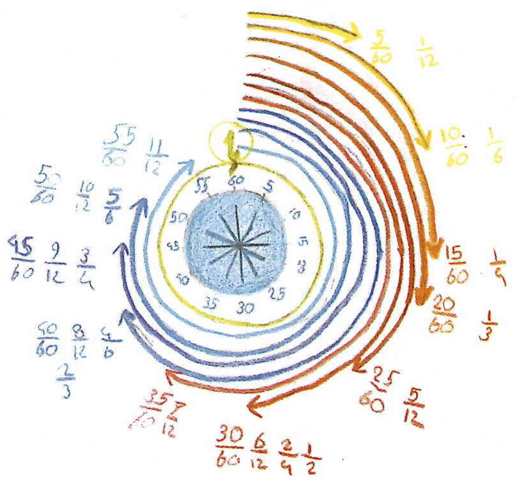
La cinquième classe

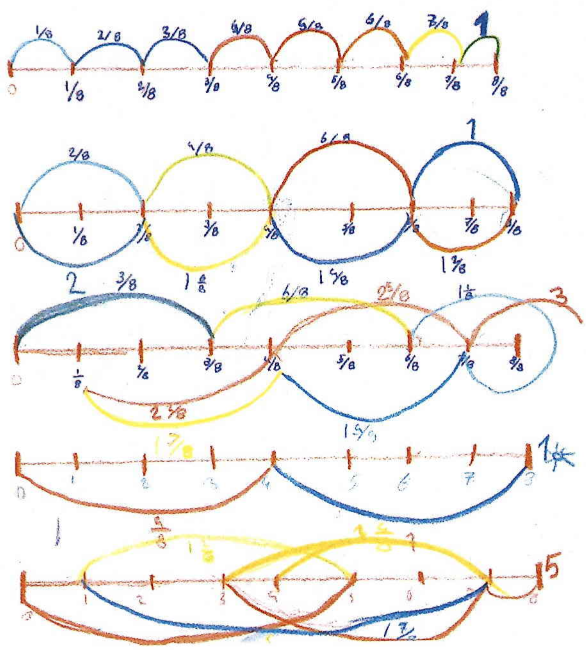
Entre le calcul lié au mouvement et à la visualisation d'une part, et le calcul formel (règles) d'autre part, on peut encore parcourir une étape intermédiaire importante : le calcul avec des fractions concrètes [1] » dans des situations concrètes, en se basant sur la visualisation.
La pensée de l'élève de quatrième était encore fortement liée à ce qu'il voyait. En cinquième classe, la compréhension des enfants est éveillée à partir de la visualisation (représentations, modèles), chacun réalisant le travail à partir de son propre niveau d'abstraction.
On commence le travail sur les fractions en reprenant ce qui a été fait en quatrième classe. On y intègre maintenant un moment de réflexion, dans lequel le monde des fractions et ce qui s'y passe est aussi pris en

1. On fait ici la différence entre une « fraction pure » comme $\frac{3}{4}$ et une « fraction concrète » ou « fraction de » comme trois quarts de litre. On parle de la même manière de « nombre pur » comme 3 ou de « nombre concret » ou « nombre de » comme 3 pommes (NdT).

considération pour lui-même. Au cours de ce rappel et de ce nouveau regard, des changements apparaissent dans la qualité et dans l'attention. Les enfants réalisent le travail à niveau supérieur de leur développement : d'un mouvement imitatif « rêveur » à un mouvement conscient « éveillé » de la pensée ; de la description vers un travail actif ; du langage des fractions au calcul avec des fractions. Ce regard en arrière, nous le commençons encore une fois en regardant le 1. La qualité du nombre 1 possède déjà une longue histoire. En première classe, nous avons vu qu'il y avait un seul univers, et de ce fait 1 était « le plus grand » nombre. Mais quand on a seulement une pierre pour compter, alors 1 est le plus petit. L'année dernière, il y avait une crêpe, une unité qui avait à nouveau été partagée entre plusieurs et paraissait une nouvelle fois être très grande.

Le rappel offre la possibilité de rassembler le matériel (mental et concret) et de l'organiser pour pouvoir ensuite commencer le travail de calcul.
Un problème contextualisé devient le point de départ. Avec cela, une image, un événement ou une figure que l'on peut voir « derrière » le problème devront toujours être rendus conscients. De cette manière, le calcul reste accessible autant que possible aussi pour les calculateurs moins doués.
Les productions personnelles des enfants peuvent s'orienter sur la création de problèmes, les explications des uns aux autres et sur la « réalisation de matériel » pour les enfants de la quatrième.
C'est en cinquième classe que les enfants découvrent le calcul avec des fractions.
La double ligne de nombres est introduite, en fait rendue plus consciente, parce qu'en quatrième lorsque les fractions ont été associées aux tables apprises auparavant par exemple, on travaillait déjà en fait avec deux échelles.





Un Arabe de Bagdad allait bientôt mourir
Et il voulut partager ses biens entre ses trois fils
L'aîné reçut la moitié, celui du milieu le tiers
et son plus jeune fils reçut le neuvième. Il avait 17 chameaux.
Ils ne parvenaient pas à partager les chameaux.
Leur voisin leur donna un chameau. Le partage devint facile.
Et le voisin put récupérer son chameau.

Solution : $\frac{1}{18}$.
L'héritage n'était pas complet.
Peut-être un chameau était-il mort ou quelque chose comme cela.

Le choix d'une « sous-mesure appropriée » sera déterminé à partir du contexte ; dans les cas où de l'argent, des mesures ou le temps jouent un rôle, les partages seront facilement réalisés par les enfants à l'aide d'une grandeur médiatrice. À un niveau plus abstrait, travailler avec l'élastique des fractions (voir page 17) pourra venir en aide, car il permet de visualiser sur les bandes toute les divisions que l'on veut. Cela stimule le choix personnel d'une échelle pour la partie du dessous des lignes de nombres et permet de voir l'équivalence de fractions lorsqu'elle sont écrites différemment.

Les enfants peuvent faire leur propre choix sur la double ligne de nombres muette : est-ce que nous calculons avec les nombres (entiers) au-dessous de la ligne, ou est-ce que nous pouvons le faire directement avec des fractions au-dessus de la ligne ?
Les partages avec des fractions naturelles simples peuvent être tirés de contextes concrets. Pour cela, on peut concevoir le partage comme l'extraction d'une quantité à l'aide d'une (petite) mesure. Par exemple : « Combien de verres (d'$\frac{1}{8}$ de litre) est-ce que je peux remplir avec l'eau d'une bouteille (de $\frac{3}{4}$ de litre). »

Et pour finir, nous allons aussi jusqu'à la multiplication des fractions. Nous le faisons comme dans l'exemple de leçon « semailles dans les petits jardins » présentée à la fin de ce chapitre.

Dans une autre période, on peut établir un lien avec les nombres décimaux au travers de la mesure et du calcul avec de l'argent. La double ligne de nombres muette est ici aussi un intermédiaire approprié entre les nombres entiers et les fractions, entre les nombres entiers et les nombres décimaux, et aussi entre les fractions ordinaires et les nombres décimaux.

Dans ce qui suit, on trouve quelques idées pour préparer les activités de base en lien avec ce qui est présenté pour la quatrième classe.

1. Refléter le répertoire de fractions de quatrième, au moyen d'une redécouverte des qualité et quantité du nombre 1.
2. Exercer la description des actions partager, rompre, couper, etc, en portant l'attention au démarrage d'un travail avec des modèles : la *ligne de nombres* comme un modèle des suites de fractions et la rythmique associée ; le *cercle* comme modèle d'horloge, de crêpe, de pizza, de diagramme en secteurs... ; le *carré*, comme modèle de papier plié, de gâteau (au beurre), de récipient contenant un mélange..., le *rectangle* comme un prix ou un poids, comme modèle général de la quantité ou de nombre ; la bande, comme un modèle de route, de longueur, de hauteur, de jauge...
3. Calculer des parties de quantités structurées, de patterns (géométriques) structurés, mais aussi de quantités données par des nombres purs. Pour cela, mettre en image sur la double ligne de nombres.
4. Travailler avec des fractions comme opérateur, aussi avec des fractions supérieures à 1, dans le cadre des fractions concrètes.
5. Faire des exercices variés, avec des solutions géométriques ou numériques et pouvoir les écrire sous forme de calculs. Créer ses propres productions, dans lesquelles apparaissent aussi des calculs à résoudre purement numériquement (mentalement).
6. Apprendre à multiplier et à diviser des fractions naturelles simples dans des exemples concrets jusqu'à pouvoir découvrir des règles de calcul.
7. Synthèse des opérations de base avec les fractions.

Ici aussi, à la fin de la période, une leçon test devrait avoir sa place pour observer encore une fois chaque élève. Jusqu'à à quel niveau (concret ou mental) parvient-il à la solution d'un problème ? Y a-t-il encore des enfants qui utilisent l'enveloppe de fractions ? Les enfants dessinent-ils eux-mêmes des modèles pour résoudre un problème ? Ou est-ce que, dans la recherche d'une solution, ils se représentent des modèles et peuvent penser la réponse « mentalement » ?

La sixième classe

En sixième classe, il n'y a plus de période particulière pour les fractions, mais le calcul avec des fractions se poursuit normalement.

Dans la phase suivante se reflète tout ce qui précède. On retrouve des exercices de toutes les périodes précédentes, le travail avec double ligne de nombres est orienté pour autant d'élèves que possible « au-dessus », c'est-à-dire vers les fractions. Les enfants calculent alors littéralement à un niveau supérieur. Entre autres, les suites de fractions de la période de quatrième et surtout aussi le calcul de cinquième avec des fractions concrètes apparaissent désormais dans la même lumière. Ce qui semblait d'abord distinct, peut être maintenant regroupé sous un même dénominateur. Pour cela, le tableau de proportionnalité peut aussi jouer un rôle. La beauté des mathématiques, au niveau de la prise de conscience et de la compréhension, fait ici partie de ce que l'on observe. En même temps, le calcul avec des fractions est exercé aussi dans des situations concrètes. Les nombres décimaux, découverts pour décrire les « mesures » et les « calculs avec de l'argent », peuvent désormais être considérés de manière plus formelle. En fait, la vision positionnelle des nombres décimaux a déjà émergé lors de la période précédente. Maintenant, ceci est élevé dans la conscience et le chemin s'ouvre pour de vrais problèmes mathématiques, dans lesquels on explore les relations numériques entre des vraies fractions et des nombres décimaux.

Pour finir, des calculs avec des fractions pures sont effectués, en tout cas par les élèves qui en ont la capacité. Ces élèves partent (seulement) maintenant à la recherche des règles mathématiques sous-jacentes. Non seulement les règles mais aussi leur justification. Il ne s'agit bien sûr pas d'apprendre bêtement ces règles, ces élèves n'en ont d'ailleurs pas besoin. Il s'agit de la recherche elle-même, de leur découverte, de leur formulation et de la discussion des interprétations, de « comment pouvez-vous vous convaincre les uns les autres avec des arguments » et donc de l'éveil du jugement. À notre avis, des questions comme $2\frac{1}{6} : 1\frac{5}{8}$ n'ont pas leur place ici. En fin de compte, tout doit pouvoir être mis et rester « en images » pour l'enfant.

Les pourcentages sont introduits dans cette classe à partir de la pratique. Les enfants peuvent trouver beaucoup par eux-mêmes. L'enseignant montre la relation entre les fractions, les nombres à virgule et les pourcentages, entre autres en les intégrant les uns et les autres dans un tableau de proportionnalité. Le champ mathématique des rapports se structure de plus en plus pour les enfants.
Il est utile de faire de temps en temps des activités avec des fractions dans les heures d'exercices de calcul. Faites de courtes leçons avec toute la classe et préparez des feuilles d'exercices pour un travail individuel ou en petits groupes. L'objectif est que les enfants aient la possibilité de se rappeler la matière, pour ensuite pouvoir la penser et l'adapter à un niveau supérieur de réflexion. Pour les élèves rapides on peut concevoir du matériel dont les applications rassemblent plusieurs questions.
Pour les calculateurs plus faibles, il est utile de construire le travail de manière plus didactique. Cela signifie entre autres qu'il faut leur proposer beaucoup d'activités concrètes (couleurs, pliages, découpages, constructions, mesures...). Aussi bien avec des unités géométriques (cercle, carré, rectangle, bande, triangle, hexagone, cadran, rose des vents, ...) que des unités numériques (quantités, montants, poids, distances, aires... donnés par des nombres). Mais le plus important dans ces activités est le travail de pensée qui accompagne l'acte. Par conséquent, il est toujours souhaitable d'alterner les idées au cours de ces activités et que la visualisation soit exercée. Le fait de noter ce qui a été fait sous la forme de purs calculs sera pour eux la toute dernière étape sur ce chemin. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire que tout le monde fasse cette étape.

Septième classe

Voir le chapitre 7 (calcul et mathématiques en 7e et 8e classes)

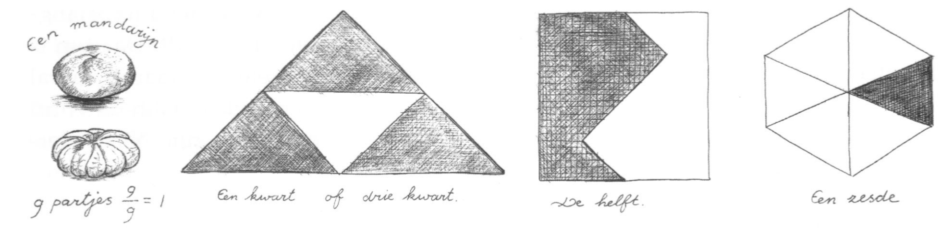
4 La pratique en quatrième

Lundi matin, début de la première période de fractions. Pas de silence empli d'attentes et d'espoirs, mais une la classe où les enfants bavardent avec animation de tout ce qu'ils ont vécu durant le week-end. Nous chantons ensemble et, ce faisant, redevenons « une seule voix ». Alors nous disons les paroles et, ensuite, lorsque les enfants se sont enfin calmés et sont assis à attendre, triomphant, je retire le linge qui couvre le plat se trouvant sur la petite table devant la classe : une crêpe ! « Mes enfants, cette crêpe, nous allons la manger. » « Donne-la moi parce que je n'ai pas eu le temps de manger ce matin » lance Éric. Charlotte, qui pense toujours à l'ensemble de la classe, me reproche : « Tu aurais mieux fait d'en cuire 24. Comme ça, ce n'est pas juste ! ». Les enfants font encore beaucoup de remarques. Il devient vite clair qu'il faut faire des parts. Luc, qui a toujours faim, essaie encore : « Qui n'en veut pas ? ». « Luc, tu sais quoi, prends, toi, le couteau. Mais pourquoi me demandes-tu cela en fait ? » « S'il n'y a que moi et Éric qui en voulons, alors on prendra chacun la moitié ! ». Un vacarme impressionnant montre clairement que Luc doit partager d'une autre manière. Ce fut tout un puzzle, mais peu après chaque enfant put mettre un brin de crêpe dans sa bouche.
Après la première crêpe, les enfants se sont répartis en groupes avec un nombre différents d'enfants dans chaque

groupe : deux, trois, quatre,... Alors, le reste des crêpes est sorti de l'armoire, et chaque groupe en a reçu une à se partager. Les enfants racontent tout haut comment et pourquoi ils ont partagé. Un certain nombre d'enfants utilisent des noms de fractions (unitaires). Ensuite, nous faisons un beau dessin au cahier avec la première et la deuxième crêpe et leur découpage.

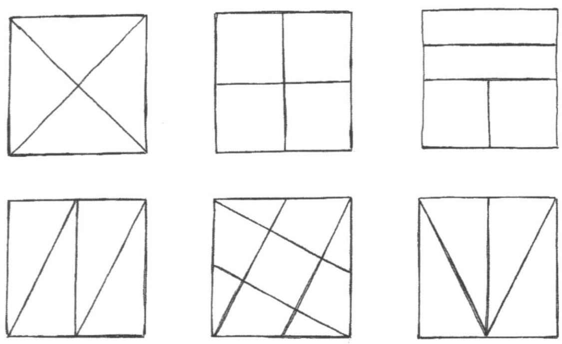
Pour les enfants, c'est une grande surprise, parfois presque un choc, lorsqu'ils remarquent qu'à l'intérieur du nombre 1, il y a tout un nouveau monde de nombres. La première prise de contact avec les fractions est placée sous le signe du « concret » de sorte que les enfants puissent y prendre pied. Nous pouvons, dans ce contexte, penser aux choses suivantes :

* Partager ce que la nature nous donne (des pommes, des noix...), et qui s'offre souvent déjà partagé, comme les mandarines...
* Diviser ce qui, culturellement, a du sens de l'être, comme le temps ; c'est la représentation de cette division du temps que voyons sur le cadran de la montre.
* Partager des quantités de choses apportées par les enfants ou le professeur.



9 petites parts *Un quart ou trois-quarts* *La moitié* *Un sixième*

L'exploration concrète de formes géométriques offre la possibilité de faire faire aux enfants beaucoup de travaux personnels. Tout seul, ou peut-être en petits groupes, ils vont se mettre au travail pour partager cercles, rectangles, triangles ou bandes ! Les enfants peuvent être très créatifs lorsqu'ils ont l'occasion d'explorer ces formes.
Le professeur peut aussi donner des formes géométriques déjà partagées, et laisser les enfants rechercher de quelles parties il s'agit.

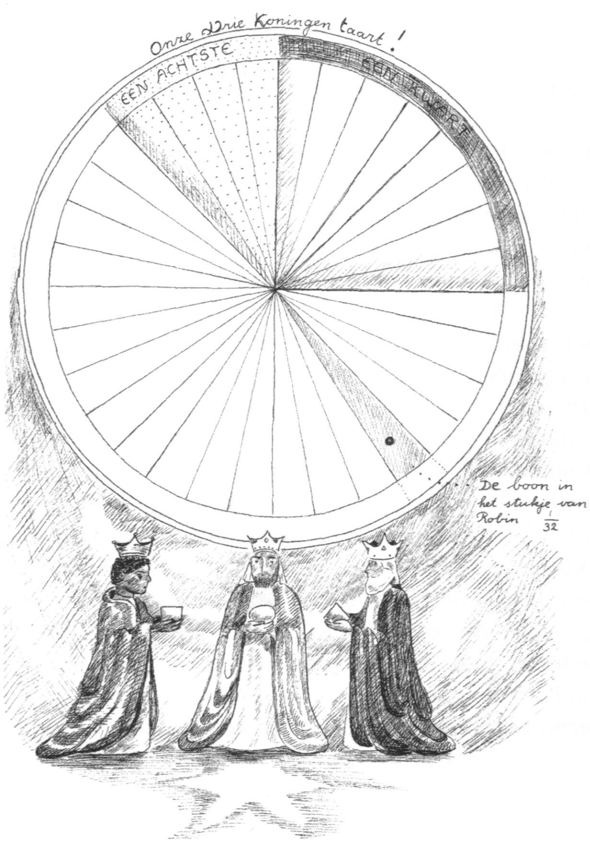


Nous pouvons aussi réaliser cela ensemble en plein air. Nous formons un grand cercle ou une rangée (une bande) et nous recherchons les fractions naturelles.

Il y a 32 enfants dans la classe, un nombre idéal pour manipuler des fractions. Nous formons un cercle en nous tenant par la main. Nous divisons ensuite ce cercle en deux, en quatre, en huit, etc.

Finalement, toutes les mains sont lâchées et chacun se retrouve tout seul. Après toutes les divisions successives, nous avons toujours exprimé en mots ce qui s'est passé : nous sommes une moitié ; vous êtes l'autre. Nous sommes un quart, ils sont un quart etc. À la fin, chaque enfant dit « je suis un des trente-deux ; je suis un trente-deuxième de toute la classe ». Cela résonne de manière impressionnante ; de même, la manière dont chacun écoute les autres est remarquable.

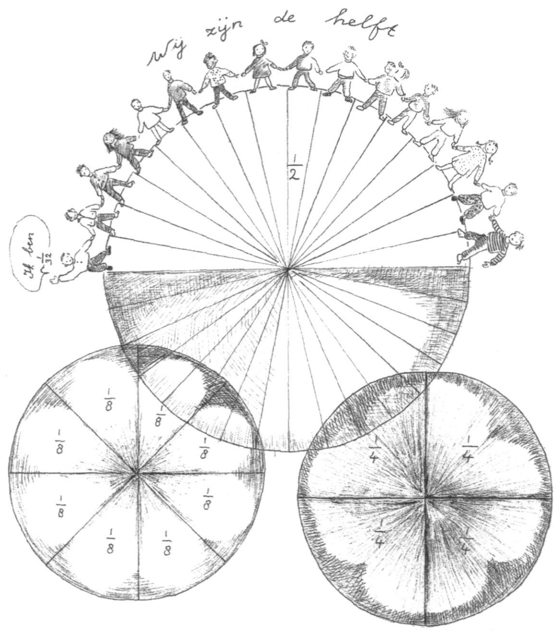
Après cela, nous avons encore partagé le cercle en parties égales en utilisant des rubans colorés, en faisant des morceaux de plus en plus petits. Les rubans ont alors été déposés sur le sol comme une sorte de rose des vents. Nous en avons fait le dessin au cahier.



Notre gâteau des Rois — *UN HUITIÈME* — *UN QUART* — *La fève dans le morceau de Robin $\frac{1}{32}$*

Le cercle, je l'ai encore utilisé par la suite : « tourne d'un huitième », « avance d'un quart », etc étaient des choses que tous pouvaient assez rapidement réaliser.

Petit à petit, la dénomination des parties est apparue de manière naturelle. Maintenant, nous allons aussi écrire ces « noms ». D'abord nous prenons des cercles et des bandes colorées, nous allons les plier et les découper.



Nous somme la moitié

Je suis $\frac{1}{32}$

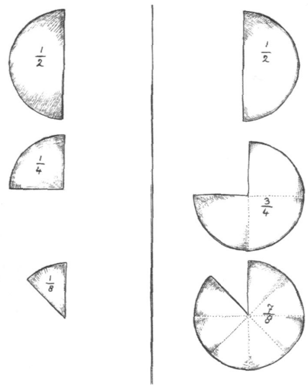
Plier, c'est une bonne activité pour que les enfants, en faisant, acquièrent « le penser dans la manipulation ». Ceci est vrai également de la coloration de bandes fractionnées. On peut commencer par faire la suite des divisions en deux ($\frac{1}{2}$ jusque $\frac{1}{16}$ y compris), ensuite celle, mélangée, de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$. Ensuite on peut ajouter $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{10}$. On donne une couleur différente à chaque fraction unitaire.
Plier possède l'avantage que la totalité continue à exister. Lorsque les enfants découpent la fraction unitaire dont il est question, ils peuvent la coller dans leur cahier en y indiquant son nom.

Ce qu'il y a de bien avec les fractions unitaires, c'est qu'on peut les dénombrer. Par exemple il va exactement 4 morceaux de $\frac{1}{8}$ dans $\frac{1}{2}$. Chaque nouvelle fraction unitaire forme ainsi une nouvelle mesure avec laquelle l'unité, la bande « entière », peut être mesurée. Ne travailler initialement qu'avec la suite des divisions en deux peut éviter beaucoup de confusion. Il ne faut pas vouloir tout faire en une fois. La question « qu'est-ce qui recompose le tout ? » conduit, rien qu'avec la suite des divisions en deux, à beaucoup de productions personnelles, comme $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}$; dans la manipulation tout au moins, pas comme calcul.
Avec trois morceaux de $\frac{1}{9}$, on peut recouvrir un morceau de $\frac{1}{3}$, mais deux morceaux de $\frac{1}{9}$ sont plus qu'un morceau de $\frac{1}{6}$. Pour les questions qui apparaissent maintenant, ce sont les enfants eux-mêmes qui doivent chercher une solution. L'unité est bien divisée en unités de plus en plus petites, mais celles-ci ne sont plus toujours une partie l'une de l'autre.
Laissez aussi quelques élèves – ou peut-être bien tous – expérimenter des techniques de pliages tant soit peu élaborées. Quelles fractions apparaissent alors ?

J'ai décidé de jeter un regard rétrospectif sur le travail des derniers jours. Les enfants avaient travaillé avec beaucoup d'enthousiasme, et les fractions résonnaient dans la classe comme si c'était quelque chose de tout à fait habituel. À partir d'une situation concrète, j'ai voulu vérifier si les partages et les dénominations avaient conduit au premier concept de fraction.

Mais lorsque, le jour suivant, j'ai apporté en classe une belle grande tarte aux fruits bien ronde et que j'ai demandé à notre Martin joufflu, qui n'est pourtant pas un des plus lents : « qu'est-ce que tu préfères : $\frac{1}{3}$ *ou* $\frac{1}{30}$ *? », il est apparu que la force des nombres entiers n'était pas encore rompue. Une telle chose nécessite vraiment du temps et beaucoup d'exercices (variés). Plus tard dans la période, cela m'est à nouveau apparu régulièrement.*

Compter pour arriver plus tard au numérateur



Au départ, nous travaillons à partir du dénombrement de parties que les enfants peuvent compter. Autrement dit, nous comptons avec des fractions unitaires. Nous pouvons aussi donner le tout dont manque une partie qui équivaut à une fraction unitaire. Alors on demande : « quelle partie manque ? ».

Nous avions partagé une bande en 10 et, après en avoir découpé $\frac{1}{10}$, les enfants écrivaient avec assiduité qu'il en restait $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{10}$ ... et $\frac{1}{10}$. Lisander n'aime pas écrire mais apprécie compter. Il proposa immédiatement de mettre des petits points ou tout simplement 9.

La classe a trouvé que c'était une chouette idée, mais alors on ne « voit » pas bien de quoi il s'agit. Il fut alors décidé de prendre la notation $\frac{9}{10}$.

Numérateur et dénominateur

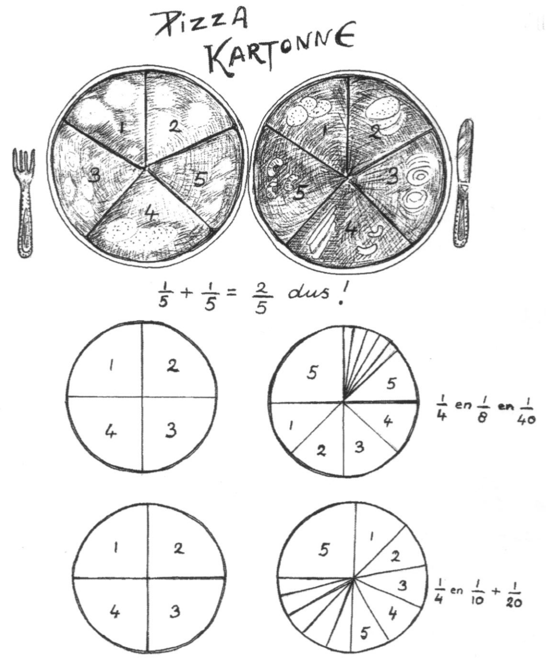
Tant que nous travaillons avec des formes géométriques qui doivent être ou qui sont partagées, il n'est pas difficile pour les enfants de pourvoir les fractions d'un numérateur et d'un dénominateur.

Pour distinguer encore d'une autre manière le numérateur du dénominateur, la famille Lemieux fut introduite : papa, maman, François, Sophie, Albert et Charles sont les six membres de la famille Lemieux.

Albert et Charles sont deux membres de la famille Lemieux. On écrit $\frac{1}{\text{Lemieux}}$, le dénominateur, comme nom de famille. Le numérateur donne le nombre de membres de la famille Lemieux. Ou encore, il faut remplir $\frac{\dots}{\text{Lemieux}}$. Un peu plus tard cela devient « combien parmi les « sixièmes » devons nous prendre ? ».

Jusqu'à présent, nous avons appris à connaître les fractions naturelles comme résultat d'une manipulation : partager, plier, couper une unité.

Maintenant, nous allons partager des multiplicités : « Partagez deux pizzas entre vous cinq. Combien recevez-vous chacun ? ». Lors d'une première recherche, les enfants choisiront certainement la première solution : $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$. Ultérieurement, on verra d'autres solutions parce que les enfants se familiarisent de plus en plus avec les différentes fractions et suite de fractions ($\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{40}$ ou $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{20}\dots$).

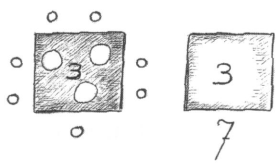


Le partage d'aliments conduira le plus souvent les élèves de l'école Waldorf, familiers des cinquièmes, à la première solution. Si vous souhaitez faire apparaître les autres partages au cours d'un repas au restaurant « À la casserole gourmande », alors vous pouvez le faire en ne servant pas tout en même temps, ou en faisant venir la cinquième personne plus tard, après avoir partagé la première pizza. Il est amusant de jouer une fois vraiment un tel repas. En cinquième, les crêpes peuvent aussi avoir un prix, par exemple 6€. Que doit payer chacun ? En sixième, il peut y avoir des pizzas de différents prix : par exemple 10€ et 12,50€.

Redécouvrir encore une fois les symboles

Bien que nous ayons déjà donné un nom aux parties de la fraction, il est maintenant possible de découvrir le symbole d'une autre manière.

La notation des fractions peut apparaître de plusieurs manières. Voici une chouette découverte d'enfants qui étaient assis à une table carrée et devaient se partager 3 pizzas en 7. La situation à table fut symbolisée en 2 étapes :



Pratiquement la fraction comme on la note formellement !

Découvrir la fraction comme opérateur

Fractions rapides

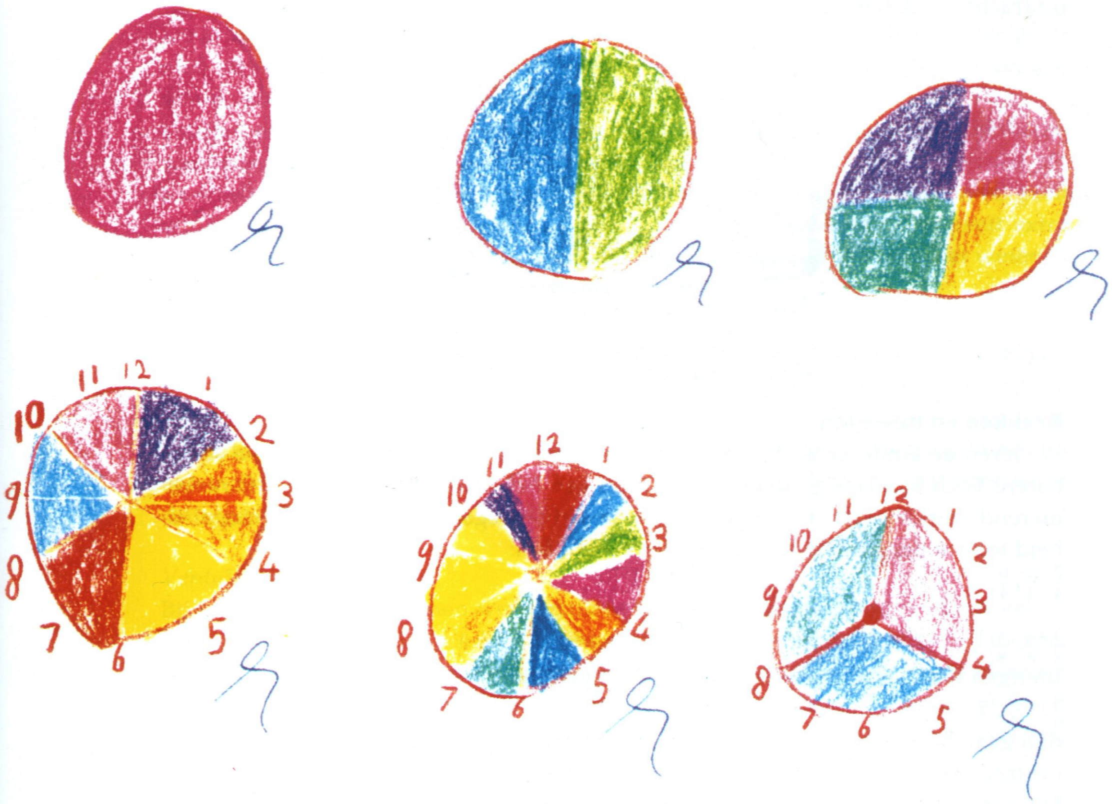
Dans la salle, il y a beaucoup de place et nous nous partageons en 3 groupes. « Quelle est la partie de la classe qui se trouve dans chaque groupe ? » Il n'est difficile de répondre : $\frac{1}{3}$. Mais maintenant, nous retournons la question : « $\frac{1}{4}$ de la classe peut s'asseoir sur le sol ». Un certain nombre d'enfants s'assoient très vite pour « y être », mais de quart, il n'en est pas question ; une partie des enfants se remet alors debout après quelques chamailleries.

Les enfants se répartissent en deux groupes et ils donnent eux-mêmes des instructions à leur groupe. Pour cela, ils se placent en cercle ou en rangée.

Rose des vents

« Qui sait où se trouve le nord ? Bien. Vous allez tous vous mettre avec le nez vers le nord. C'est votre girouette, et lorsqu'elle se trouve comme ça, c'est que le vent vient du sud. Quand il prend de l'ampleur ?, il bouge avec le soleil, le vent souffle vers l'ouest. Où se trouve ton nez Jonas? Jusqu'où as-tu tourné Marielle ? Et lorsque le vent diminue, il tourne dans l'autre sens que le soleil, il tourne de manière opposée au soleil. Compris? Bon, nous avons maintenant un petit vent. Tout le monde a son nez qui pointe vers le nord. Le vent du sud se développe vers l'est. Oui, Hugo, c'est bien trois quarts de tour, du sud à l'est, au nord, à l'ouest. Un long tour ! Et maintenant, il diminue jusqu'à redevenir un vent du sud. Marie, nous sommes de retour ! Oui, d'abord un quart de tour en arrière et puis encore un demi-tour. » **?**

Au tableau, une rose des vents est dessinée et, après avoir soufflé le vent un certain temps, on y dessine en couleur le dernier mouvement du vent. Quand il augmente, avec du rouge, et quand il diminue, avec du bleu. On peut encore poser des questions : « Hier, il y avait un vent du sud. Il a diminué de 3/4. Quelle est maintenant la direction du vent ? Est-ce qu'il aurait pu ainsi augmenter pour souffler dans la même direction ? »



1 uur is 60 minuten

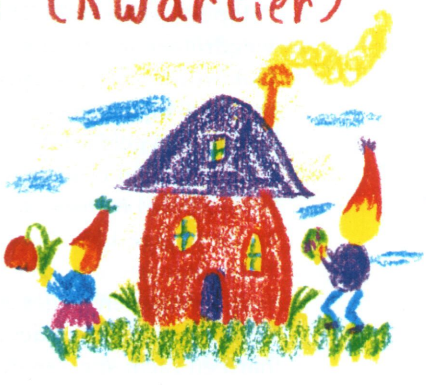
1 uur is 2X 30 minuten (half uur)

1 uur is 4X15 minuten (kwartier)

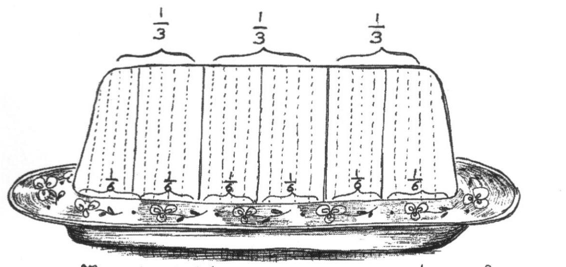
1 uur is 6X 10 minuten

1 uur is 12X 5 minuten

1 uur is 3X 20 minuten



Des histoires de calcul dessinées se prêtent également à l'exploration de la fraction comme opérateur.



Combien de petites tranches y a-t-il dans $\frac{1}{6}$ du gâteau ?
Combien de petites tranches y a-t-il dans $\frac{1}{3}$?
Combien de petites tranches y a-t-il dans le gâteau en entier ?
Combien de petites tranches y a-t-il dans une moitié ?

Fractions et mouvement

Nous apprenons les fractions aux enfants de manière très concrète, par des manipulation. Mais une pratique adaptée de l'élément du mouvement peut également agir de manière enthousiasmante. L'aspect rythmique du mouvement permet aussi une répétition discrète des tables de multiplication :

$$\frac{2}{4}, \frac{4}{4}, \frac{6}{4} \ldots \qquad \frac{3}{8}, \frac{6}{8}, \frac{9}{8} \ldots$$

Si nous y introduisons les nombres entiers :

$$\frac{4}{6}, 1\frac{2}{6}, 2, \ldots$$

alors le mouvement et la conscience vont très fort l'un avec l'autre, et nous avons plus à faire à un exercice de concentration. Un tel exercice trouve sa place en cinquième classe.

Ceci peut se dérouler dans un cercle dont les enfants doivent eux-mêmes déterminer la grandeur ainsi que celle de leurs pas, de manière que les nombres entiers arrivent toujours au même endroit. Revenir au même endroit donne plus de sens et d'intention à la signification des nombres entiers dans $\frac{1}{8}$; $1\ \frac{1}{8}$; $2\ \frac{1}{8}$. Lorsqu'il est possible que le mouvement se déroule également en arrière, ceci est certainement à recommander. Mais lorsque la marche arrière conduit à des poussées et à des bousculades, alors il vaut mieux que les enfants se retournent et avancent « avec leur nez » vers l'arrière.

Les formes que les enfants parcourent ou font en parlant à haute voix, sont aussi exécutées en silence ; le professeur interrompt le mouvement et demande « Stop ! Où es tu ? » Ce genre de moment de prise de conscience évite que les enfants s'endorment dans le rythme ou ne s'imitent simplement les uns les autres.

On provoque également des moments de prise de conscience en faisant faire soudain un autre mouvement. Par exemple, « Vous faites un pas tous les huitièmes, mais lorsque la fraction devient un nombre entier, alors vous frappez dans les mains » : $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}, \frac{9}{8}, \frac{10}{8} \ldots$

Ici aussi on peut voir apparaître des différences de niveau. Par exemple, certains enfants retrouvent de suite (spontanément) les nombres entiers.

Dans les plus grandes classes, des mouvements moteurs faits avec les membres peuvent perturber certains enfants du point de vue de la conscience. Pour de tels enfants, il est bon de donner des exercices qui peuvent

être faits sans mouvements, mais où les accents qui autrement seraient donnés par le mouvement, sont ici indiqués par exemple par le fait de parler plus doucement ou plus fort.
Il faut également donner régulièrement des tâches individuelles, afin que cela ne devient pas un grondement ânonné sans réfléchir.

Exemples

En cercle
Les enfants font la suite, par exemple, des huitièmes et disent : un huitième, deux huitième, trois… En disant chaque numérateur, les enfants frappent dans les mains ; à chaque dénominateur, ils donnent un coup par terre.
Le mouvement est fait en silence. Lorsque le professeur désigne un enfant, il doit dire où ils en sont dans la suite.
On utilise des instruments de musique. Quand on entend un coup de tambour, on exécute la suite en avant, et quand c'est un coup de triangle, en arrière. Il y a encore plus de plaisir lorsque cette forme est faite en silence : « Où sommes-nous? Qui pourrait le dire ? ».

Partager en deux
Les enfants marchent en cercle au rythme de la chanson « de grandes cloches disent bim bam ». Pour la première phrase, on prend un long pas, ensuite on marche sur le rythme ; on termine avec les tous petits pas du « tikke, takke, tikke, takke, tikke, takke, tak ». Il est possible également de faire marcher trois enfants côte à côte avec chacun un rythme différent, ou encore tous les enfants en 3 grands cercles, chacun devant s'efforcer de garder son propre rythme.

Doubler
En marchant en rythme, les pas entiers (longs pas) sont partagés en deux. La largeur du local est de 7 longs pas (d'abord en faire l'estimation). « Combien de demi-pas faites-vous pour passer d'un côté à l'autre ? Combien de quarts de pas y a-t-il dans la même distance ? » Trois enfants peuvent en faire la démonstration en marchant l'un à côté de l'autre : lorsqu'un enfant fait un grand pas, le deuxième fait deux petits pas, et le troisième en fait quatre minuscules.
Ce peut être aussi l'occasion de marcher et de dire des suites d'égalités. Pour beaucoup d'enfants, c'est encore difficile ; les trois premiers, cela va encore, mais ensuite... En 5[e], quand nous réfléchissons sur ce qui a été découvert en 4[e], lorsque nous poursuivons normalement les suites d'égalités ($\frac{1}{8}, \frac{2}{16}, \frac{3}{24} \ldots$), nous pouvons alors faire de « doubler » une activité beaucoup plus claire ($\frac{1}{8}, \frac{2}{16}, \frac{4}{32} \ldots$).

Élastique de fractions

On place des marques (à intervalles réguliers) sur un élastique blanc. On peut alors reporter sur une bande n'importe quel fractionnement que l'on souhaite.
Par exemple, on étire l'élastique de manière que les début de la bande et de l'élastique coïncident, de même que la fin de la bande et la fin de la septième (par exemple) partie de l'élastique. On marque alors tous les septièmes de la bande.
On peut ainsi faire voir que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15}$ et ainsi de suite. En premier lieu, on divise la bande en trois, ensuite en six ou en quinze. Dans tous les cas cités, on trouvera toujours la même partie de la bande. On pourra y revenir plus tard, lorsque les règles pour la mise au même dénominateur pour additionner, soustraire ou diviser seront « découvertes ».

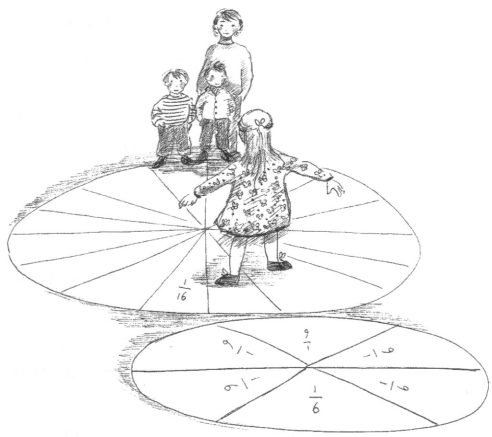
On peut faire soi-même un tel élastique. On place des boutons aux deux extrémités (pour pouvoir le tenir plus facilement). On peut l'étirer ensuite cinq fois et on le fixe comme cela sur la table. À partir d'un point choisi pour le début, on marque un trait tous les 4 cm (on note à chaque trait 0, 10, 20, ...). Il faut être très attentif à ne pas déplacer l'élastique pendant le marquage, ce qui ôterait toute valeur au travail. On a maintenant une sorte de règle graduée extensible avec une graduation variable. Avec elle, on peut diviser « proportionnellement » toute longueur.

Jeux

Voici enfin quelques jeux pour clôturer la première période (et aussi les autres). De tels jeux sont aussi tout à fait adaptés pour observer de près, sans qu'on le remarque, l'ensemble de la classe, ou un enfant en particulier. On peut les faire de manière que tout ce qui a été fait durant la période s'y retrouve.
Le calcul en mouvement peut être clôturé dans ce cas par un jeu dans lequel le rythme ne joue pas de rôle (important). Il s'agit maintenant d'être bien éveillé pour réagir de manière alerte. Le rôle de mesure que joue ici la fraction est important. Cet aspect n'était pas apparu dans les suites de fractions. Là on marchait toujours avec des pas égaux.

Dedans
Dessinés sur le sol, il y a plusieurs cercles divisés dans lequel des fractions sont inscrites. « Va te mettre dans $\frac{3}{4}$ ». La manière dont ils exécutent cela, ils la choisissent eux-mêmes.

Danse des fractions
Un cercle sur le sol est divisé en deux demis, ensuite en quarts, en huitièmes ou quelques chose de semblable. Un autre cercle en tiers, en sixième, en neuvième etc. « Qui peut se mettre dans un demi-cercle? » « Va te mettre dans $1\frac{1}{8}$ ».



Point de fraction
On dessine un grand cercle sur le sol, et on le partage en quelques fractions unitaires. On désigne un enfant (celui qui y est) ; les autres enfants sont autour du cercle. On donne une fraction à former et on compte ensuite (par exemple) avec des pas de $\frac{1}{8}$ jusqu'à 1. Pendant que l'on compte, les enfants doivent alors se placer avec leur pieds dans la fraction à former. Celui qui ne le réussit pas durant ce temps est « pris » et doit faire un gage.
Variation : on donne un calcul ; les enfants doivent se placer dans le résultat.
Variation : au lieu d'un cercle, utiliser un triangle ou un quadrilatère.

Une deuxième période

Alors que la première période était clairement placée sous le signe de la découverte par l'exploration et la recherche, nous allons apprendre à travailler avec les fractions naturelles et, sur un plan concret, nous les utiliserons également dans des applications pratiques. Et « ce que nous faisons », les enfants apprendront aussi à l'écrire sous forme de petits calculs.

Collectionner des fractions

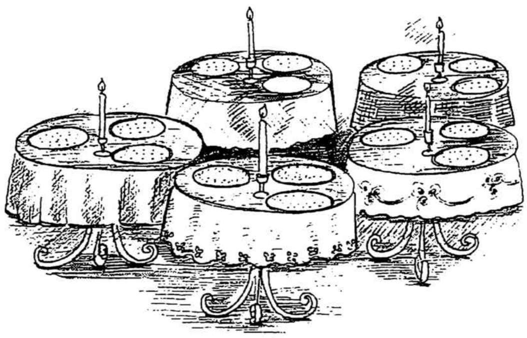
Ce matin, il y a sur toutes les tables un morceau de carton d'or brillant ! « Qu'est-ce que nous allons faire, est-ce que nous allons faire la fête ? » Je réponds triomphalement : « Calculer ». Les enfants me regardent avec étonnement. Même les élèves d'une école Waldorf doivent s'habituer à ce que les choses ordinaires puissent aussi être une fête. Je vois certains enfants palper la couche d'or, en tout cas, aujourd'hui, les enfants auront ce qu'ils veulent. Et moi aussi, car bientôt ils auront tous une « enveloppe de fractions » brillante !

Les premiers jours de la nouvelle période sur les fractions ont été utilisés pour rafraichir « l'ancien ». Nous avons à nouveau partagé de toutes sortes de façons et aussi découpé et plié des unités géométriques en fractions.

Nous l'avons aussi fait avec des disques de fractions colorées. Nous avons ainsi réalisé la suite des moitiés (jusque $\frac{1}{16}$). Après cela, également une suite mélangée ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$), Plus tard, nous avons encore ajouté $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{10}$ mais cela n'était pas vraiment nécessaire. Chaque fraction unitaire avait reçu sa propre couleur. Toutes ces fractions ont été découpées de sorte que chacun a pu mettre au moins « une unité » dans l'enveloppe d'or, qui est maintenant notre enveloppe de fractions. Avec les fractions de l'enveloppe, nous pouvons poser toutes sortes de problèmes. Nous avons été attentifs à ce qu'il y ait plusieurs disques avec la même fraction unitaire, de sorte qu'on pourra aussi dépasser 1. Dans l'enveloppe, il y a aussi des bandes avec toutes sortes de divisions. Ici, les fractions ne sont pas découpées, mais la ligne de pliage est clairement marquée. Avec ces modèles faits maison nous commençons le travail. Grâce à cette enveloppe, on peut non seulement trouver des solutions pour des problèmes concrets, mais les enfants sont particulièrement stimulés à faire leurs propres productions.

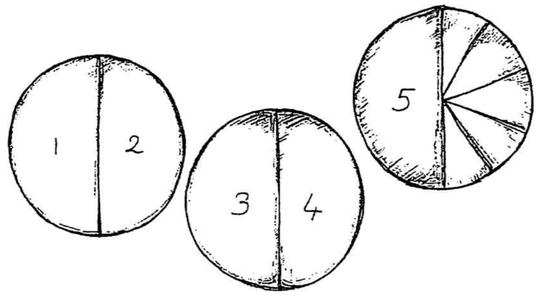
Pour chaque trouvaille, nous allons aussi écrire la résolution comme calcul. Avec ces premier calculs, les enfants sont occupés de manière très vivante.

Posez encore une autre question avec des crêpes. L'enveloppe de fractions peut fournir de bons services et nous pouvons maintenant écrire des calculs.
« Partagez quinze crêpes en parts égales entre cinq groupes (tables). » Ensuite, vous les mettez au travail.



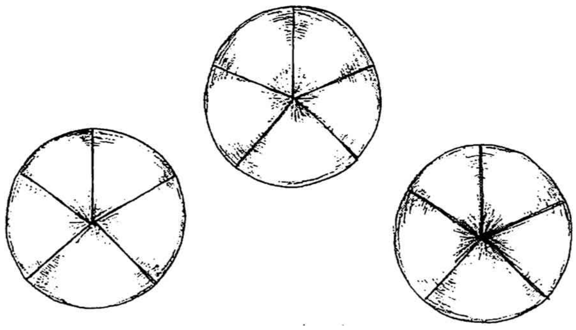
« Partagez maintenant trois crêpes en parts égales entre cinq élèves. »
Quelles solutions sont données comme résultats ? Un groupe aura par exemple partagé toutes les crêpes en deux. Chaque enfant reçoit alors une demi-crêpe et il y reste encore une demi-crêpe à partager. Ça, c'est facile à partager en cinq parties égales. La solution qui est donnée par ce groupe est :

Chacun reçoit d'abord $\frac{1}{2}$. Ensuite encore $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$, ce qui est $\frac{1}{10}$.

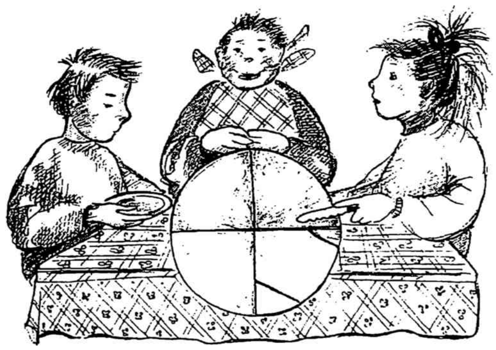


Une autre solution. On partage chaque crêpe en 5. Chaque enfant reçoit 3 morceaux.

Chacun reçoit $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, cela fait 3 fois $\frac{1}{5}$, c'est $\frac{3}{5}$.



Cela peut donner des surprises. Voici la consigne : « Partagez une crêpe équitablement entre trois personnes ». Les enfants se mettent au travail. Tout d'abord, la crêpe est divisée en quarts, puis le dernier quart est partagé en trois parties comme le montre le dessin ci-dessous. Le professeurs fait remarquer que cela n'est pas équitable et l'un des enfants répond : « Mais si, c'et équitable ! Il a toujours un peu plus faim. »

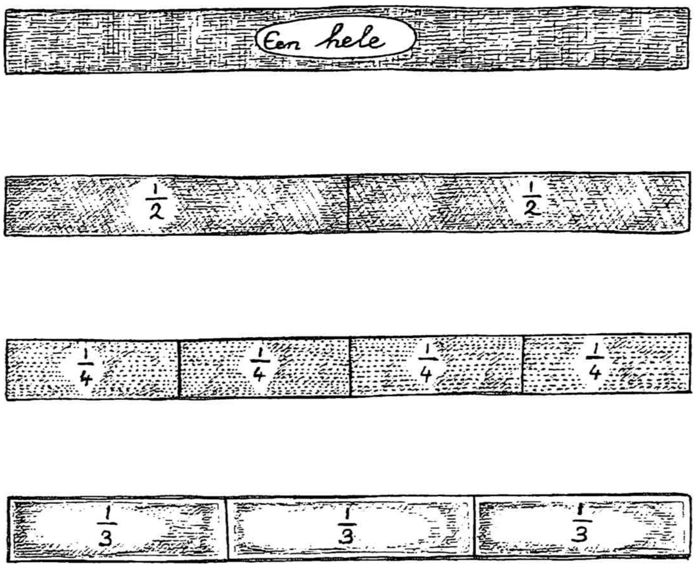


Un tel moment peut conduire à un approfondissement de la notion de fraction. L'expression « partager en parts égales » serait ici plus appropriée. Les enfants peuvent être très inventifs dans ce domaine.

Il n'est pas judicieux d'aller trop rapidement vers les règles de calcul pour l'addition, la soustraction, la division et la multiplication. Par contre, on peut demander aux enfants après leur travail de dessiner de manière précise comment on a partagé durant le repas. Ils peuvent alors écrire de petits calculs.

Par ailleurs, il est didactiquement important que les enfants ne se limitent pas à un modèle unique pour les fractions. Autant les cercles que des carrés, des rectangles et des bandes permettent de progresser.

Envisagez un grand nombre d'exercices dans lesquels l'utilisation de bandes est possible. Les enfants développe d'une autre manière un ressenti de la taille d'une fraction.



Un entier [Le tout]

Avec les bandes, les enfants se rapprochent de l'image de la ligne des nombres. Une ligne de nombres qui est constituée dans ce cas d'intervalles et non pas de points. Les fractions désignent donc ici des parties de la ligne de nombres, non pas comme les nombres sur la règle. Cette image des fractions est proche des activités telles que « sauter sur la ligne des nombres » (voir le chapitre 2 « Sur le chemin du calcul »).

Continuer à bouger

Mettons une nouvelle fois les enfants en mouvement. Nous allons maintenant découvrir les fractions par approximations. Et nous comparons. « Montrez quelle est la taille de $\frac{1}{2}$? » Toutes les moitiés que montre les mains des enfants sont différentes. « Quelle était votre unité ? » Pour le professeur, c'est une belle occasion de regarder le tempérament en relation avec le geste.

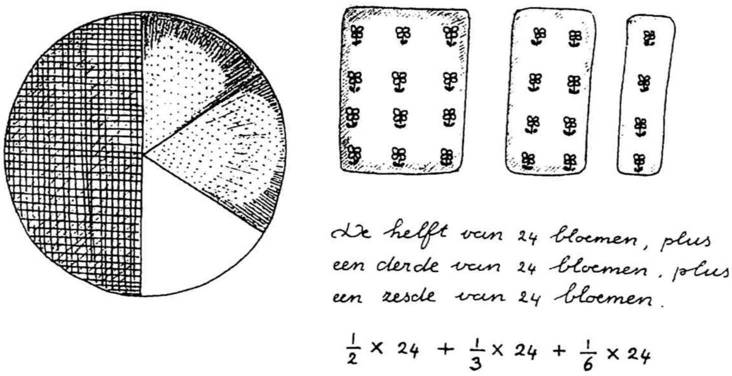
Dehors, nous pouvons encore faire des exercices dans la cours de récréation. Tout d'abord, choisir l'unité, puis donner à chacun des exercices : « Place-toi au $\frac{1}{3}$ ou aux $\frac{3}{8}$ et ainsi de suite. »
Dans la salle de classe, vous pouvez aussi faire des jeux avec les enfants. Deux enfants qui ont tous deux une « bande unité » non divisée de l'enveloppe se posent mutuellement des questions et écrivent ensuite le calcul. Ou bien : « Je pense à une fraction. » Avec des questions les autres doivent la rechercher : « Est-elle plus grande que $\frac{1}{8}$? » « Est-elle plus petite que $\frac{1}{2}$? »... Devine quelles sont les fractions possibles ?

Jouer au chat et à la souris avec les fractions
Donnez à chaque enfant une fraction (simple) écrite sur un grand papier. On place la fraction sur son dos. Placez les enfants derrière une ligne et choisissez un chat. Vous dites une fraction, qui peut être composée à partir des fractions sur le dos des enfants. Les enfants qui peuvent former ensemble la fraction peuvent traverser la ligne et sont saufs. Celui qui ne peut participer à aucun groupe peut aussi traverser, mais alors il peut être pris par le chat. (S'il y a trop d'enfants qui traversent seuls, alors on peut uniquement laisser traverser les groupes de fractions). Chaque groupe de fractions doit rester groupé de l'autre côté de la ligne (pour un contrôle).

Cercles vides
Il y a deux cercles « vides » sur le sol. « Qui peut faire un tour entier du cercle ? Qui peut faire un demi-tour au centre ? Qui parcourt $\frac{3}{4}$ de tour? Qui $1\frac{1}{4}$? Qui tourne $2\frac{3}{4}$ fois sur son axe ? »

Penser et résoudre des problèmes

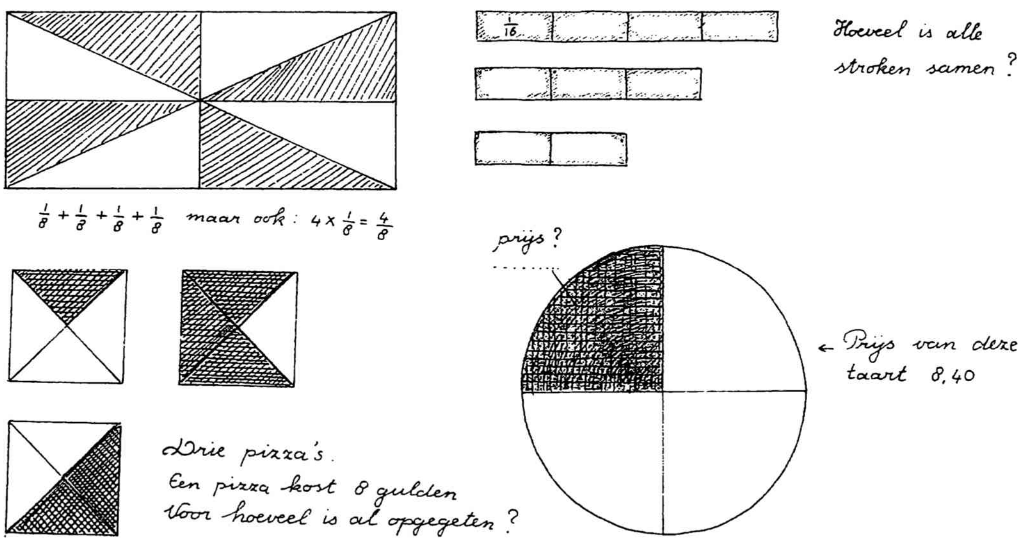
Peu à peu, les enfants aiment à travailler réellement. Mais les « calculs » ne sont toujours pas de purs calcul. Notez bien qu'il ne s'agit pas de calculer, mais de travailler avec des fractions. Les fractions décrivent des partages ou indiquent comment partager. Lorsqu'apparaît $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, alors on a quelque chose comme :



La moitié de 24 fleurs, plus
un tiers de 24 fleurs, plus
un sixième de 24 fleurs

Donc, $\frac{1}{2}$ crêpe et $\frac{1}{3}$ de crêpe ($\frac{1}{2}c + \frac{1}{3}c$) et à côté : la moitié de 24 fleurs plus $\frac{1}{3}$ de 24 fleurs plus $\frac{1}{6}$ de 24 fleurs ($\frac{1}{2} \times 24 + \frac{1}{3} \times 24 + \frac{1}{6} \times 24$).

Des problèmes géométriques structurés sont très adaptés pour les découvertes :



En haut à droite : « Combien font toutes les bandes ensemble ? »

En bas à gauche : « Trois pizzas. Une pizza coûte 8 €. Combien coûte ce qui a été mangé ? »

En bas à droite : « Le prix de cette tarte est 8,40 € ». Quel est le prix du morceau indiqué ? »

Les réponses des enfants dans les exemples ci-dessus sont évidentes. Dans le cas du rectangle, il y a par exemple : $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ mais aussi : $4 \times \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$

Que les quatre parties du rectangle peuvent former ensemble un demi-rectangle, cela est montré de façon convaincante par un travail de découpage et d'assemblage.

Les enfants ont d'abord découpé plusieurs carrés de la même taille dans du papier de couleur. Ensuite, ils les découpent le long d'une diagonale. En deux groupes, les enfants ont composé une grande figure géométrique et l'ont collée sur une grande planche à dessin. À l'aide de la forme et des couleurs, ils ont recherché des structures et conçu des problèmes de fractions. Les calculs sont écrits en dessous de la belle forme. Certains enfants ont découvert que l'on peut trouver des exercices et écrire la somme des fractions dans des couleurs correspondantes à celle de la forme.

Jusqu'où avons-nous été ?

Assurez-vous qu'avant de terminer le travail sur les fractions en quatrième classe une nouvelle « leçon-test » ait lieu. Un matin où vous prévoyez les exercices de manière à pouvoir observer le « répertoire de fractions » que s'est approprié chaque enfant. Il est aussi important d'observer comment les enfants utilisent le matériel de l'enveloppe des fractions. Vérifiez également le travail en groupe. Qui prend les devants et quelle sont les initiatives que prennent les enfants pour arriver ensemble à une solution ?

Pour les enfants, un tel jour ne doit pas être différent des autres jours, mais pour l'enseignant, c'est important de créer des moments dans lesquels il observe les différences individuelles. Lors de la création de matériel pédagogique pour les années suivantes, ces différences seront de plus en plus décisives.

5 La pratique en 5e classe

1, un grand tout et une petite quantité

Nous examinons 1 de bien des manières et regardons ce que « un » signifiait dans les années scolaires écoulées. Qu'on peut partager 1 en un nombre infini de parties, la classe s'en souvenait parfaitement, mais lorsque j'ai abordé les fractions de la quatrième classe, il semblait que tout était complètement parti.

Une fois au travail, la mémoire profonde des enfants refait surface. Certains enfants éprouvent le besoin d'aller rechercher l'enveloppe des fractions et nous voilà tous à nouveau dedans !

Nous regardons encore une fois les fractions à partir « du mouvement ».

En cinquième classe, le mouvement est stimulé avec plus de conscience. Les suites qui ont déjà été faites en quatrième peuvent être faites à nouveau, mais maintenant avec un accent supplémentaire. Pour avoir une idée des activités de la classe, en voici quelques exemples pour donner de l'inspiration.

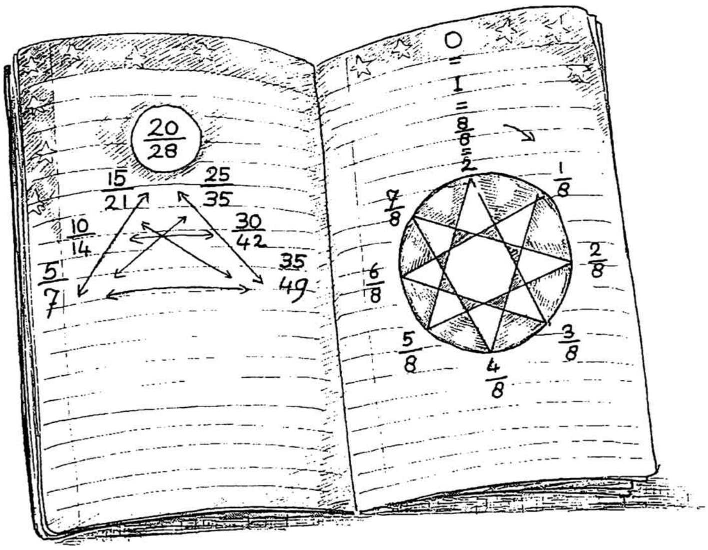
Les suites peuvent être dites à nouveau, cette fois non pas à partir de 0, mais par exemple à partir de $\frac{2}{7}$. La suite de $\frac{3}{7}$ commençant à $\frac{2}{7}$ devient $\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{8}{7}, \frac{11}{7}$, et ainsi de suite. La suite qui commence à partir de $\frac{2}{7}$, et où on ajoute d'abord $\frac{3}{7}$ et ensuite chaque fois $\frac{1}{7}$ en plus : $\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{9}{7}, \frac{14}{7}, \frac{20}{7}$...

Des suites de fractions équivalentes (telles que $\frac{1}{8}, \frac{2}{16}, \frac{3}{24}$, ...) peuvent déjà être exercées en quatrième. En cinquième, cela peut être rendu plus difficile, par exemple en laissant chaque groupe démarrer une étape plus tard. Ainsi, les fractions équivalentes n'apparaissent pas uniquement au sein de l'exercice, mais aussi au sein des groupes.

Par exemple :

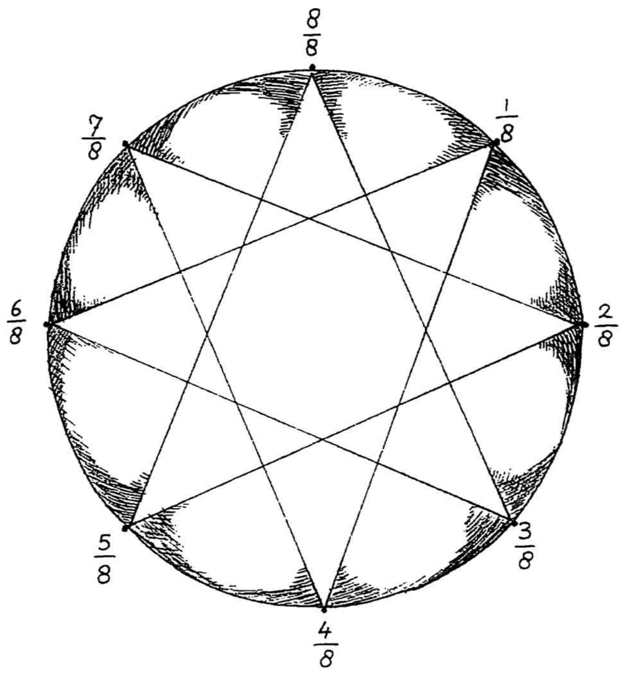
$\frac{5}{7}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{15}{21}$	$\frac{20}{28}$
	$\frac{5}{7}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{15}{21}$
		$\frac{5}{7}$	$\frac{10}{14}$
			$\frac{5}{7}$

Les suites peuvent être mises en place à partir d'un certain point de symétrie. Nous passons chaque fois la frontière par ce point, mais dans des directions qui s'alternent. Cela peut être fait pour chaque suite. Par exemple, pour la suite des fractions équivalentes à $\frac{5}{7}$:



Pour toutes les activités ci-dessus, après une courte période d'effort intellectuel des enfants, de la régularité apparaît. Après cela, le rythme, le mouvement se trouve remis à l'avant-plan. C'est alors le moment de proposer un autre exercice pour activer à nouveau la pensée.
Sur le papier aussi, les suites peuvent être mises en images.

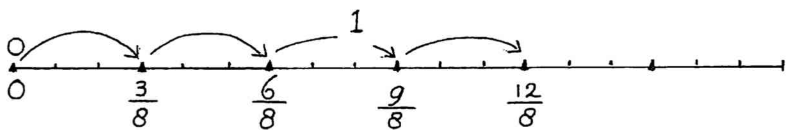
Faire des figures en étoile est une activité dans laquelle les suites de fractions (par exemple celle de $\frac{3}{8}$) doivent être connues, afin d'arriver à quelque chose de nouveau. La belle forme qui apparaît ici est le résultat de l'utilisation de la connaissance des fractions (ce n'est donc pas elle qui conduit au concept de la suite). Il est agréable de voir que les enfants veulent ensuite essayer d'autres suites de fractions (de huitièmes) pour voir comment se modifie la figure.



Cette étoile est également celle de $\frac{5}{8}$, mais parcourue dans l'autre direction. Est-ce que cela n'aurait pas à voir avec le fait que $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$?
La suite de $\frac{1}{8}$ (et celle de $\frac{7}{8}$) ne donne sur le cercle aucune vraie étoile, mais tout simplement l'octogone régulier. La suite de $\frac{2}{8}$ (qui est aussi celle de $\frac{1}{4}$) montre un carré. Ensuite, demandez aux enfants ce qu'il en est avec la ligne de $\frac{3}{4}$?

Ce qui est très agréable, c'est de faire les étoiles avec des fils sur des plaques avec des clous. Il faut cependant être conscient du fait que la compréhension des fractions peut alors disparaître tout à fait du champ de vision.

Maintenant, prenez la suite de $\frac{3}{8}$, que l'on trace sur une ligne droite. Cela peut se poursuivre indéfiniment. Après quelques étapes, vous sautez au dessus de l'unité, tandis que plus tard, vous sautez au-dessus de 2 ... $\frac{3}{8}, \frac{6}{8}, 1\frac{1}{8}, 1\frac{4}{8}, 1\frac{7}{8}, 2\frac{2}{8}$,... La question est maintenant : « À quoi ressemblent les sauts de l'étoile de $\frac{3}{8}$? » Ou, « Quelle est l'image correspondant à la suite de $\frac{3}{8}$ sur la ligne des nombres ? » [?] ?



Mais lorsque l'on dessine les pas le long d'une circonférence, on peut oublier le passage par les « entiers ».

Régularités

Des choses très intéressantes apparaissent lorsque les séries de fractions sont écrites sous forme de tableaux. Nous pouvons y découvrir toutes sortes de lois. Voici deux exemples, l'un d'une table d'addition et l'autre d'une table de multiplication. Nous nous limitons aux « huitièmes ».

OPTELTABEL VAN DE RIJ VAN ACHTSTEN

$+$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}=1$
$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}=1$	
$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}=1$		
$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}=1$			
$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}=1$				
$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}=1$					
$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}=1$						
$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}=1$							
$\frac{8}{8}=1$								

Table d’addition des « huitièmes », à compléter soi-même pour y chercher les régularités.

GEHEEL GETAL X ACHTSTEN

X	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$
2	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{8}{8}=1$	$1\frac{2}{8}$	$1\frac{4}{8}$	$1\frac{6}{8}$	$1\frac{8}{8}=2$
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{4}{8}$	$1\frac{7}{8}$	$2\frac{2}{8}$	$2\frac{5}{8}$	$2\frac{8}{8}=3$
4	$\frac{4}{8}$	$\frac{8}{8}=1$	$1\frac{4}{8}$	$1\frac{8}{8}=2$	$2\frac{4}{8}$	$2\frac{8}{8}=3$	$3\frac{4}{8}$	$3\frac{8}{8}=4$
5	$\frac{5}{8}$	$1\frac{2}{8}$	$1\frac{7}{8}$	$2\frac{4}{8}$	$3\frac{1}{8}$	$3\frac{6}{8}$	$4\frac{3}{8}$	5
6	$\frac{6}{8}$	$1\frac{4}{8}$	$2\frac{2}{8}$	$2\frac{8}{8}=3$	$3\frac{6}{8}$	$4\frac{4}{8}$	$5\frac{2}{8}$	6
7	$\frac{7}{8}$	$1\frac{6}{8}$	$2\frac{5}{8}$	$3\frac{4}{8}$	$4\frac{3}{8}$	$5\frac{2}{8}$	$6\frac{1}{8}$	7
8	$\frac{8}{8}=1$	$\frac{16}{8}=2$	$\frac{24}{8}=3$	$\frac{32}{8}=4$	$\frac{40}{8}=5$	$\frac{48}{8}=6$	$\frac{56}{8}=7$	$\frac{64}{8}=8$

Table de multiplication de « un nombre entier × ... huitièmes ». « Qu’y a-t-il à découvrir ? »

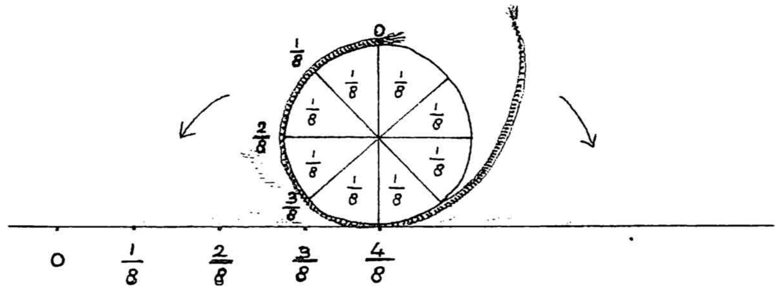
L’exercice donne naissance à l’art

On exerce maintenant la description de partages et fractions dans toutes sortes d’exercices. Les contextes sont choisis de telle sorte que ligne des nombres, cercle, carré, bande, et ainsi de suite (voir aussi la partie *Piste didactique* page 2) peuvent être utilisés comme un modèle pour la résolution.

De cercle à la ligne des nombres

La différence entre le cercle et la ligne des nombres est qu'on ne peut pas sortir de la circonférence même par une infinité de tours, alors qu'avec une suite de fractions sur la ligne de nombres, on est vite hors de vue.

Ceci est bien montré lorsque l'on déroule le cercle le long de la ligne de nombres. Imaginez que les fractions sont des petits cachets sur le cercle :

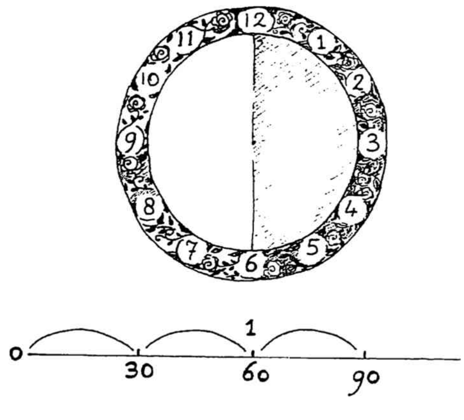


Lorsque le cercle roule et jusqu'à repasser par O, il faut qu'à toutes les fractions soit ajouté 1 : 1, $1\frac{1}{8}$, $1\frac{2}{8}$ et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous arrivions à 2 (c'est-à-dire à O). De cette façon, nous nous éloignons de plus en plus loin de la maison.

On peut montrer cela joliment. Celui qui a dans sa classe des doigts habiles, peuvent se risquer à ceci : on enroule un gros fil autour d'un beau cercle coloré dessiné dans le cahier. Les divisions sont reportées sur la ficelle que l'on déroule et colle ensuite comme ligne de nombres. Aucun enfant n'oubliera ce qu'est une ligne de nombres avec des fractions !

Mesures de référence pour les grandeurs intermédiaires

L'horloge nous a donné l'image d'une heure, une demi-heure, un quart d'heure, trois quarts d'heure. Plus tard, nous avons ajouté cinq minutes comme $\frac{1}{12}$ de tour, dix minutes comme $\frac{1}{6}$ de tour.



Le cercle est un modèle pour une horloge (non numérique). Dans ce cas, il y a une sorte de subdivision naturelle de la circonférence, où celle qui saute le plus au yeux (après les quarts des quarts d'heure), c'est celle des cinq minutes.

Douze parties égales, donc chacune de $\frac{1}{12}$, qui ensemble forment la suite de $\frac{1}{12}$. Avec les aiguilles de la montre le long de la circonférence, on parcourt ainsi la suite $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots, \frac{11}{12}, \frac{12}{12} (= 1), \frac{13}{12} \ldots$

Si on regarde cela « en minutes », alors la suite devient 5, 10, 15, ..., 55, 60 (= 1 heure), 65... Il n'y a plus de fractions et la table de 5 apparaît !

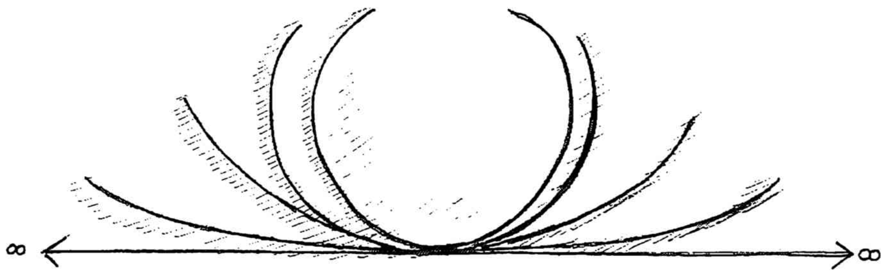
Lorsque l'on est au centre du cercle et que l'on suit les mouvements le long de la circonférence, on peut parler en termes de « tours ». Un tour entier pour les enfants qui ont fait le tour complet le long de la circonférence. Ou encore : un tour entier pour une heure. C'est ce que pourrait dire la grande aiguille de l'horloge. La moitié d'un tour et le quart de tour complètent naturellement l'image. Les fractions de la suite de $\frac{1}{12}$ sont aussi un moyen de décrire un tel tour.
Les enfants ont joliment dessiné cela (voir les travaux d'élèves en couleur [?]). ?

En 6e classe, on peut encore aller un peu plus loin. Un tour complet en géométrie fait toujours 360° ! Un quart de tour est alors 90°, et un huitième de tour, 45°. Qu'en est-il maintenant avec notre suite de $\frac{1}{12}$? 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°... Plus de fractions mais la table 30, ou tout simplement de la table 3.

Plus tard, les enfants partiront à la recherche d'autres mesures de référence en tant que grandeurs médiatrices qui pourront être utilisées à la place de l'unité fracturée ou partagée.

De l'horloge à une ligne de nombres sur le sol

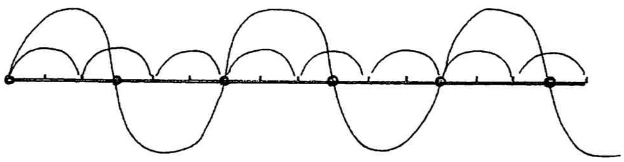
Nous avons commencé à travailler sur l'horloge. Toutes les cinq minutes ont été garnies d'une fraction. Ensuite, je laisse l'horloge se désagréger en utilisant un dessin de formes[2].



Les enfants ont ainsi une image d'une ligne comme une petite partie d'un cercle, et non pas comme quelque chose de fini. Le cercle peut sans cesse se dérouler jusqu'à devenir une ligne infiniment longue. Nous nous sommes limités à notre premier tour et avons ensuite partagé en douze parties égales le morceau de ligne. Le cadran de l'horloge était devenu linéaire. Où se trouve 12 ? Il y a bien un 0 sur l'horloge ? Comment obtenir douze parties parfaitement égales ? Certains plient des bandes avec une nouvelle difficulté qui apparaît : diviser en trois parties égales. D'autres ont pris leur règle, mais ont ensuite dû faire une division difficile. Un élève l'a fait avec l'élastique des fractions.

Le mouvement rendu visible

On peut aussi dessiner des « vagues » en mouvement sur une ligne de fractions. Dans l'image, le mouvement se calme. On y trouve aussi des maths :

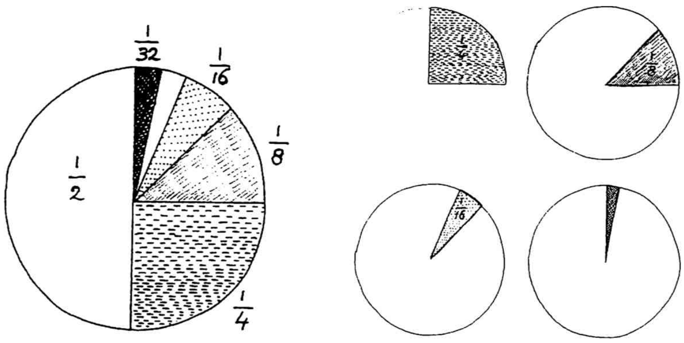


2. Le dessin ne me paraît pas correspondre à l'explication donnée ci-dessous (NdT).

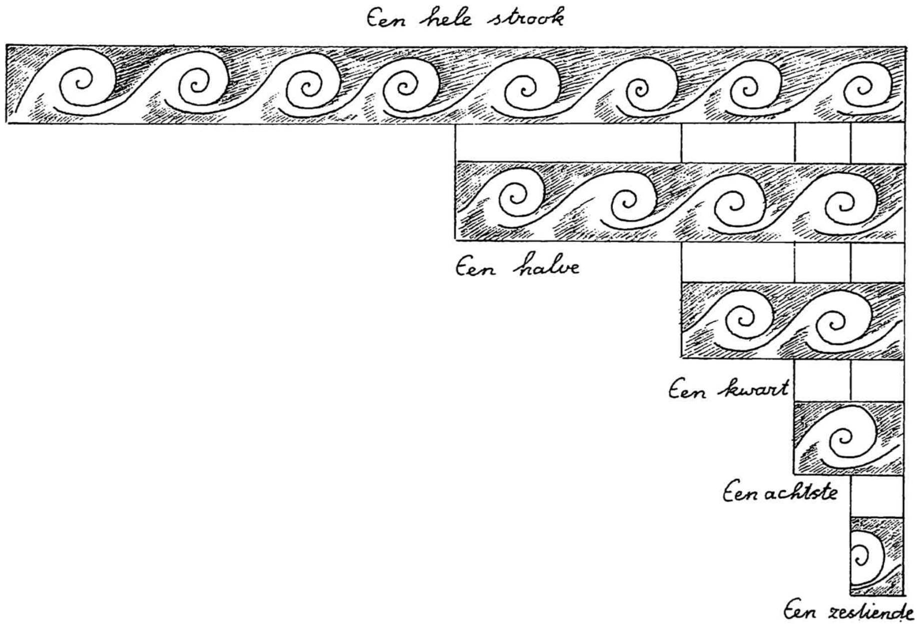
Cercle, bande, ligne

Ce qui a été fait en mouvement et dans les formes, peut être consolidé par exemple de la manière suivante dans le calcul :

— La série des « demis » sur le cercle comme celle qui a déjà été faite sur une ligne :

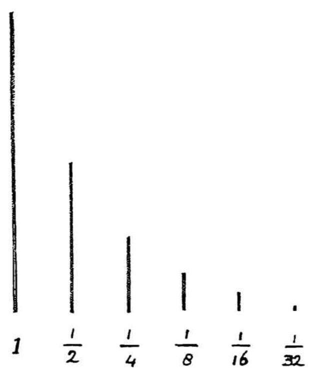


— Bandes avec la série des « demis » :



[Bande entière ; une demi-bande ; un quart ; un huitième ; un seizième]

— La série des « demis » mise en diagramme, avec des morceaux de la ligne des nombres :



Ensuite nous sommes allés à l'extérieur sur le trottoir. Deux élèves on dû marquer les points 0 et 1. Nous avons fait des exercices :

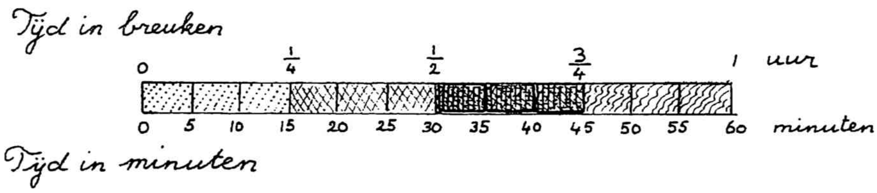
— *Aller se mettre sur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{9}$ et ainsi de suite.*

— *Aller sur $\frac{1}{2}$ puis aller $\frac{1}{4}$ plus loin.*

— *Aller d'abord sur $\frac{6}{12}$ puis aller de là sur $\frac{1}{3}$.*

Les enfants devaient marcher et parler pour montrer ce qu'ils faisaient.

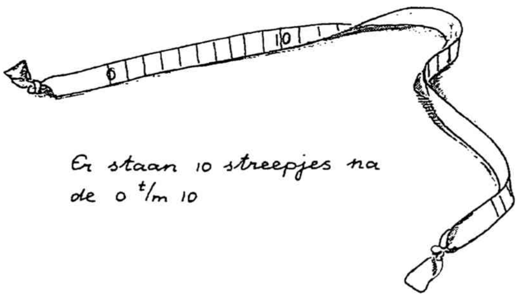
Nous décidons également de dessiner une horloge dans un cercle. Dans ce cas, les fractions disparaissent, $\frac{4}{12}$ deviennent 20 (minutes), et la moitié de 20 (min) est 10 (minutes), qui donne le même endroit que $\frac{2}{12}$. Ou, « Je suis sur 15 minutes et je veux en avoir un tiers. » C'est donc cinq minutes ou $\frac{1}{12}$. Joachim a soudainement vu que $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ (d'heure) est égal à $\frac{1}{12}$ (d'heure). Pour certains, cela n'est devenu clair que lorsque nous l'avons dessiné.



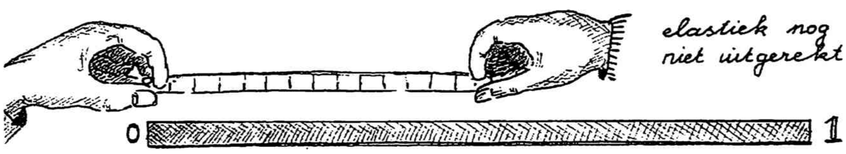
[Temps en fractions ... heure]
[Temps en minutes ... minutes]

Après la partie rythmique, les enfants peuvent tracer une ligne dans leur cahier de période et à partir de là créer toutes sortes de « calculs » à résoudre par eux-mêmes.

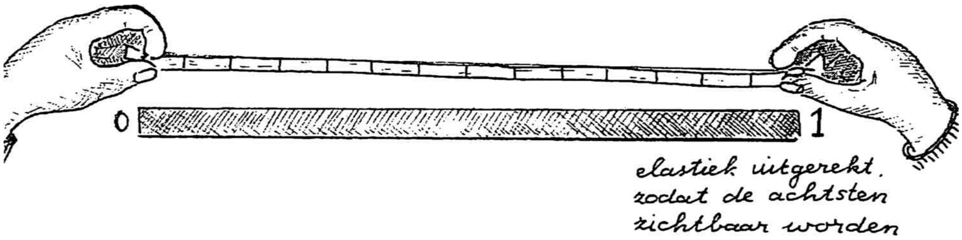
Il existe deux sortes de lignes de nombres, nous avons dû réfléchir à cela. Pour cela, j'ai accroché dans la classe une ligne de nombres (un fil pour pendre le linge), où les élèves ont accroché avec des pinces à linge des fractions, écrites sur un bout de papier. Maintenant, nous avions donc deux types de lignes de nombres, celle qui ont des bandes (intervalles) et celle avec des points. Nous avons appliqué cette connaissance en utilisant l'élastique de fractions.



[Il y a 10 barres après 0 et jusque 10 compris]



[Élastique pas encore tendu]



[Élastique tendu de manière à faire apparaître les huitièmes]

On voit que $\frac{3}{8}$ est plus grand que $\frac{1}{4}$. Pouvez-vous aussi voir de combien exactement il est plus grand ?
On a regardé cela de manière astucieuse : on peut trouver $\frac{1}{4}$ sur la suites des huitièmes. Pour $\frac{1}{4}$, il s'agit toujours de 4 parties égales ! La différence peut maintenant se voir en un coup d'oeil : $\frac{1}{8}$.

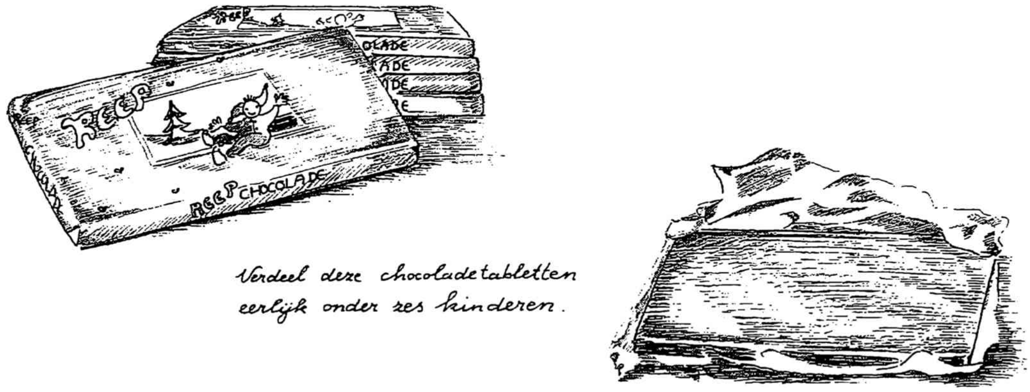
Au cours de la cinquième classe, nous faisons toujours plus d'exercices variés inspirés par la réalité quotidienne. Les enfants travaillent sur ces questions seuls ou en groupes.

Une pâtisserie fait une publicité pour son délicieux gâteau de Noël aux environ du 5 décembre.

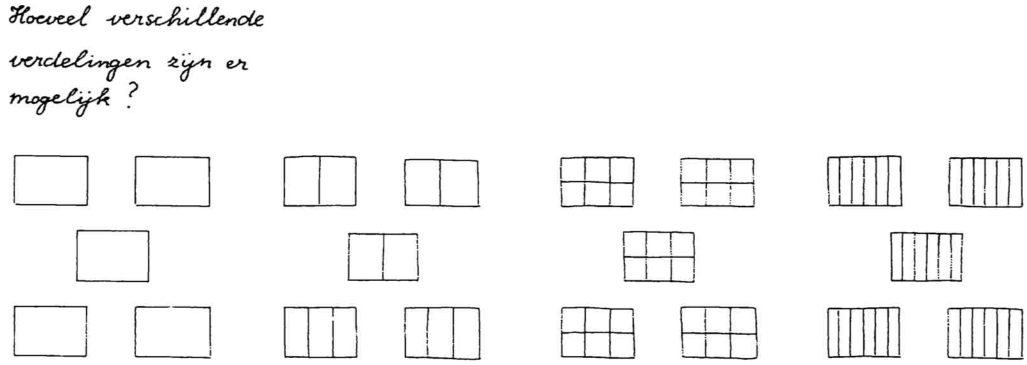
La pâte feuilletée aplatie et puis pliée se composait de 4096 couches. J'avais découpé la publicité et on s'est posé la question avec les enfants de savoir combien de fois le boulanger avait dû plié la pâte après l'avoir aplatie. À chaque pli, le nombre de couches est doublé. Si on la déplie, alors il est divisé en deux. Nous avons été surpris par la taille de la pièce de pâte de la boulangerie. Certains ont essayé de le refaire avec une feuille de journal. Le plus petit morceau obtenu par ce pliage a donné lieu à un nouveau calcul.

Une autre fois, j'ai proposé une nouvelle « journée à manger ». Cette fois, pas de crêpes mais des barres de chocolat. Parce que la barre est divise en segments, des enfants qui pouvaient de moins en moins se faire des représentations au cours de ce travail sur les fractions, se sont remis au travail enthousiasme.

Avec l'aide des barres de chocolat, les enfants ont créé toutes sortes de problèmes qu'ils se sont partagés entre eux.



[Partagez ces tablettes de chocolat équitablement entre six enfants]



[Combien de partages différents sont-ils possibles ?]

L'addition et la soustraction, aussi bien dans des problèmes concrets que comme purs calculs, commencent maintenant fonctionner vraiment. La multiplication et la division, nous ne les faisons qu'avec des nombres entiers, pas encore avec des fractions.
Créer des problèmes et les représenter sur la ligne (ou bande) de nombres est un plaisir pour la classe.

En route vers la multiplication

La multiplication et la division des fractions ne sont travaillée que de manière concrète en cinquième classe. Utilisez des fractions naturelles simples afin d'explorer le principe. Dans un exemple de leçon, nous montrons ci-dessous, comment on peut arriver à la découverte d'une règle de calcul.
Les calculs abstraits avec des fractions, il n'en est pas encore question ici.

MULTIPLICATION AVEC DES FRACTIONS. EXEMPLE DE LEÇON

Préparation

La botanique joue un rôle important en cinquième. Il y a déjà eu une courte période et nous l'utilisons pour l'enseignement des fractions.

Sous la fenêtre de la salle de classe, il y a une étroite bande de jardin, où l'on peut cultiver des graines devant la salle de classe. Pour cela, les préparatifs suivants sont nécessaires :

— Le jour avant l'introduction de la multiplication des fractions, tous les enfants apportent une boîte à chaussures et un sac poubelle en plastique.

— Prévoir un gros sac de terre pour empoter et des semences (par exemple des roses d'Inde et des violettes, qui peuvent être repiquées tôt dans l'année).
— Enfin, des feuilles de papier pour marquer les semis dans la boîte.

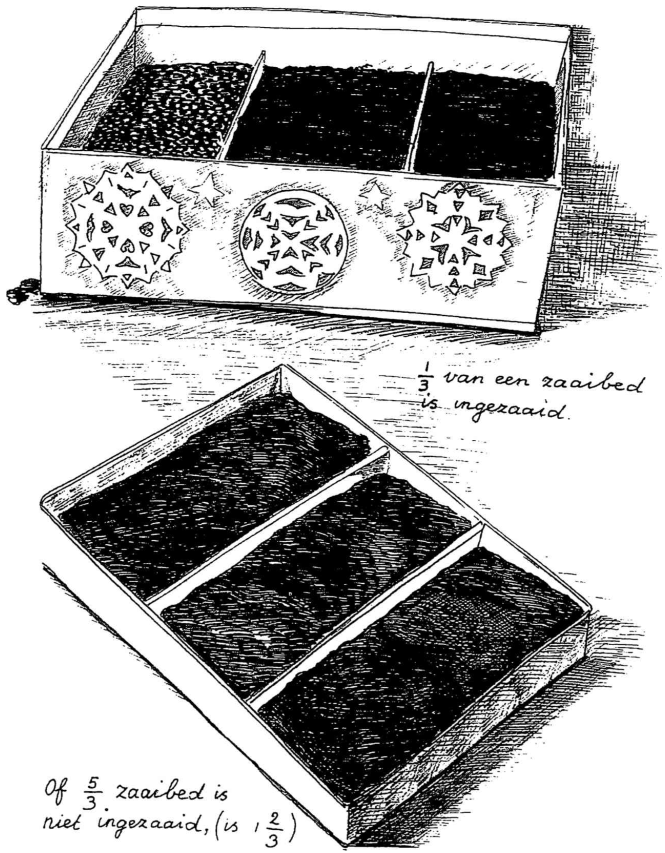
Mise en route

Laissez les enfants choisir dans quelle partie de leur jardin-boîte à chaussures ils vont commencer à semer les roses d'Inde par exemple. Mettez-les deux par deux, ou peut-être par groupe de quatre et vous assurant qu'ils ne sèment pas tous la même partie de leur boîte, par exemple : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{8}$ ou $\frac{2}{9}$.

On marque la partie ensemencée avec des bandes de papier et on place un drapeau au nom de la semence. Lorsque tous les « jardins-pépinières » se trouvent sur la table (garder les couvercles), demandez aux enfants de raconter chacun à leur tour ce qu'ils ont fait. Par exemple :
« Un tiers du semis est ensemencé. »
« Deux tiers du semis ne sont pas ensemencés. »

Par groupes de deux, les enfants mettent encore de la terre dans un des couvercles pour en faire un semis (l'autre couvercle reste vide).

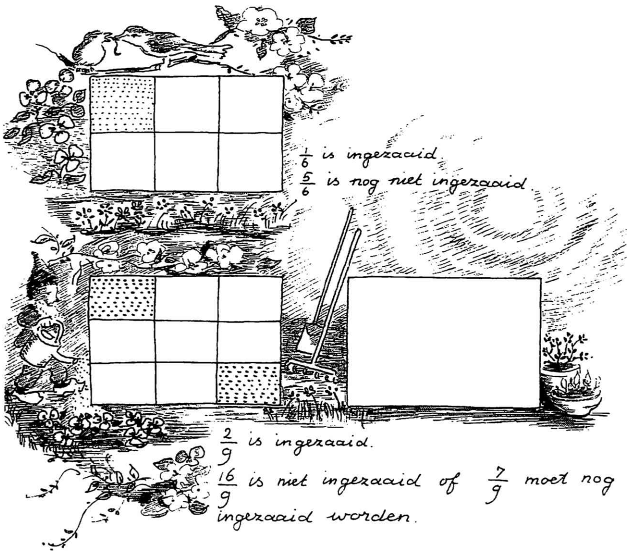
Ensuite, ils écrivent quelle partie de leur « jardin » de deux boîtes est ensemencée et quelle partie ne l'est pas.



[$\frac{1}{3}$ d'un semis est ensemencé]
[Ou $\frac{5}{3}$ d'un semis n'est pas ensemencé (c'est-à-dire $1\frac{2}{3}$)]

Tous les types de jardins et de combinaisons de semis sont possibles.

Après de nombreuses découvertes, nous travaillons par écrit.
Tout d'abord, nous dessinons quelques jardins avec un semis. Ensuite, des jardins de deux semis dont un n'est pas ensemencé.
Nous allons écrire – en langage de fractions – ce que nous savons !
Par exemple :

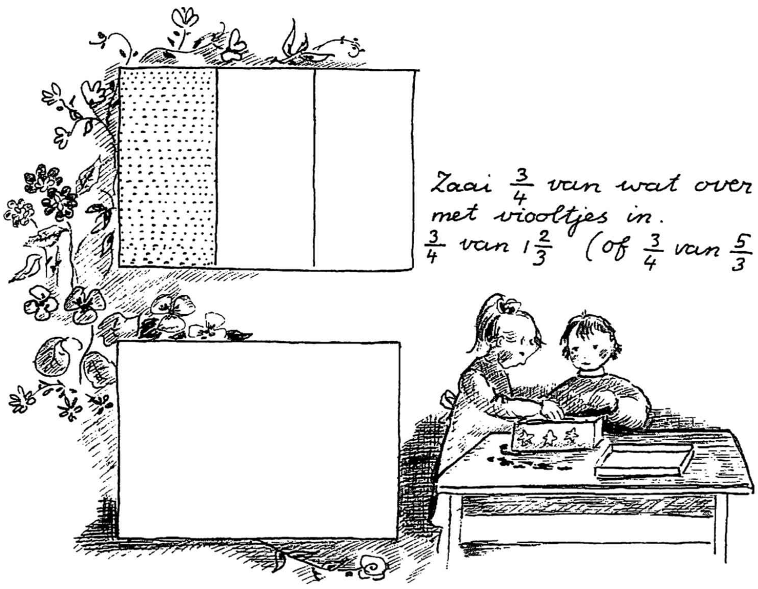


[$\frac{1}{6}$ est ensemencé]
[$\frac{5}{6}$ n'est pas ensemencé]

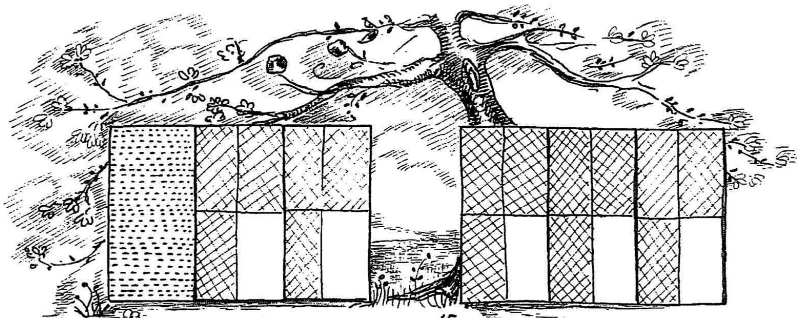
[$\frac{2}{9}$ est ensemencé]
[$\frac{16}{9}$ n'est pas ensemencé ou $1\frac{7}{9}$ doit encore être ensemencé]

Les élèves posent des questions à leur voisin (dans même esprit) !
Ils vérifient par eux-mêmes les réponses et demandent à l'autre comment ils ont fait.

Parfois, il faut les aider un peu pour écrire les fractions.



[Ensemence $\frac{3}{4}$ de ce qui reste avec des violettes]
[$\frac{3}{4}$ de $1\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{3}$]

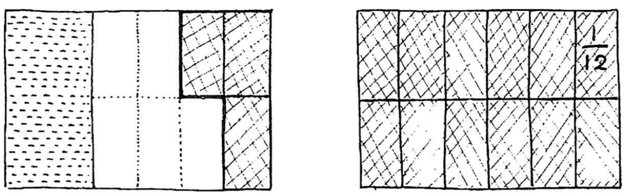


Tel de twaalfden : $\frac{15}{12}$.
Dus $\frac{3}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{12}$
Je kunt zien : $\frac{15}{12} = 1\frac{1}{4}$

[Compte les douzièmes : $\frac{15}{12}$.]
[Donc $\frac{3}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{12}$]
[On peut voir : $\frac{15}{12} = 1\frac{1}{4}$]

Als je de nu ingezaaide bedjes van $\frac{1}{12}$ anders verdeelt, zie je nog beter: $\frac{15}{12} = 1\frac{1}{4}$

[Lorsque l'on répartit les semis de $\frac{1}{12}$ autrement, on voit encore mieux : $\frac{15}{12} = 1\frac{1}{4}$]



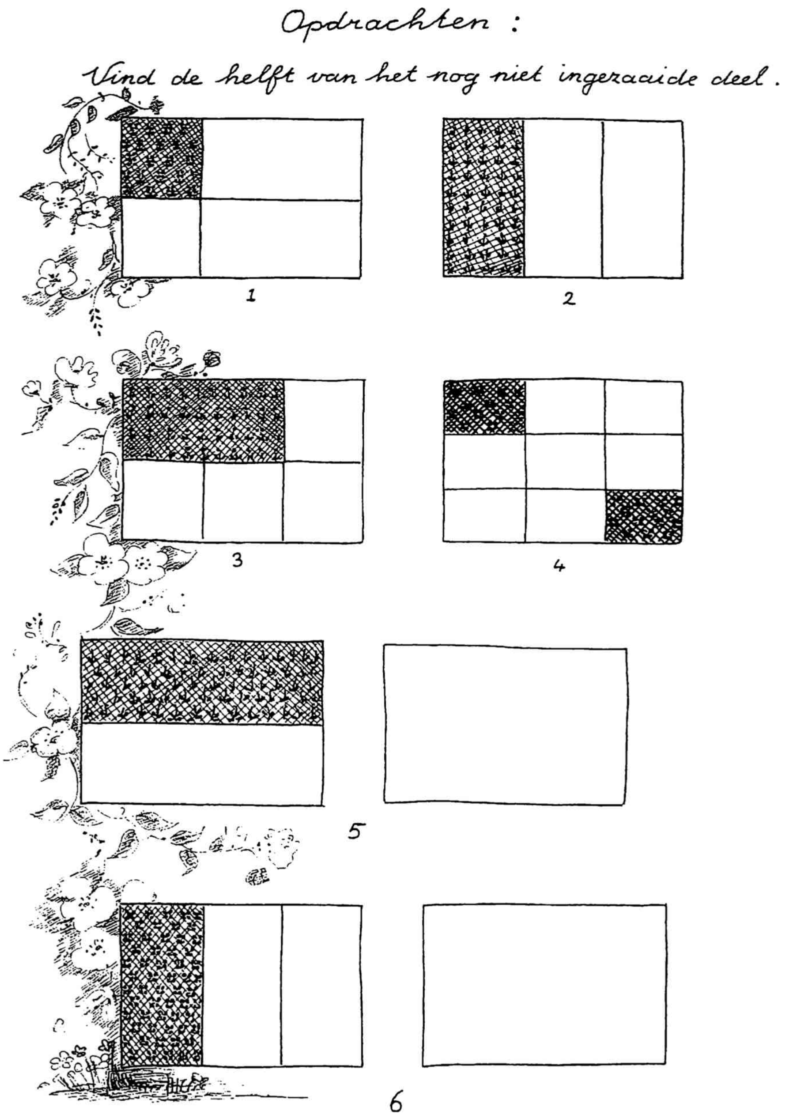
$\frac{1}{4}$ **1**

Exercer beaucoup (ensemble) !
Finalement, les enfants découvrent que les numérateurs et dénominateurs sont à multiplier entre eux, parce qu'ils voient que cela se revient toujours à cela. Tous les enfants ne voient pas cela de suite, ils ont besoin d'un coup de main avec de bonnes questions. Et il est bon de placer les réponses dans un rectangle dans un tel cas.

Un autre jour, nous reprenons les « jardinets » sur la table. Entretemps, les jardins ont été dessinés !

Vient maintenant une question à laquelle il ne faut pas répondre directement : « Si nous voulions ensemencer avec des violettes la moitié de la partie non encore semée, quelle partie du semis pourrions-nous ensemencer ? »
« Qui se risque à faire une estimation ? Est-ce la moitié ? Non ? Que pensez-vous, est-ce plus ou moins que la moitié ? »
« Dessinez une image de votre jardinet en boîte et mettez en couleur la partie que vous voulez semer. Quelle est cette partie ? »
(Soyez attentif ! Regardez bien comment divisent les enfants, s'ils le font bien et de manière habile.)

Faites une feuille de travail ou écrivez les exercices au tableau.



[Exercices : Trouvez la moitié de ce qui n'a pas encore été ensemencé.]

Les enfants se mettent au travail. Ils déterminent d'abord rapidement les parties ensemencées et non ensemencées. Ensuite, ils continent avec des questions comme celles ci-dessus. Par exemple, plus tard aussi les $\frac{3}{4}$ de la partie non-ensemencé du jardin, également le $\frac{1}{3}$. Les possibilités abondent.

Toujours estimer avant de commencer à dessiner et calculer !

De nouvelles questions émergent. Des choses dont il faut discuter. Il faut aider un grand nombre d'enfants à devenir conscients des dessins et des calculs précédents . « Qu'est-ce qui se passe lors de la multiplication avec des nombres entiers (3×6, mais aussi $3 \times \frac{3}{4}$) ? Est-ce que la réponse alors plus grande ou plus petite que ce que vous aviez avant ? »

« Et qu'est-ce qui se passe lors de la multiplication par des nombres plus petits que 1, les vraies fractions ? » (Par exemple, à $\frac{1}{2} \times 18$, mais aussi $\frac{2}{3} \times 1$).

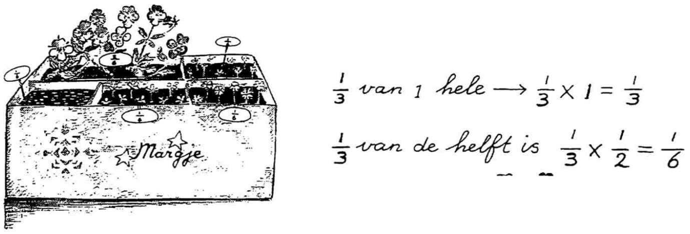
Remarque

Les enfants ont découvert eux-mêmes en semant, en prenant à plusieurs reprises des parties de parties, qu'il s'agissait de multiplier. « Maîtresse, ce sont toujours les mêmes calculs ! »

Multiplier des fractions est devenu la même chose que prendre une partie de quelque chose.

« Quand est-ce que la réponse est plus grande et quand est-elle plus petite ? »

Dans le langage des fractions, « la moitié de A » c'est $\frac{1}{2} \times A$. Dans ce cas, A peut représenter le nombre 18, ou le semis lui-même, ou la partie $2\frac{3}{4}$ d'un semis, ou tout simplement le nombre $2\frac{3}{4}$.



[$\frac{1}{3}$ d'un entier → $\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$]
[$\frac{1}{3}$ de la moitié, c'est $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$]

Pour finir, ensemencez la « boîte-jardin » entièrement. Faites un dessin dans le cahier. Ensuite, écrivez dans chaque partie d'un semis dessiné la fraction (écrite avec des nombres).
Mettez les boîtes sur le rebord de la fenêtre.. Après la germination, après plusieurs semaines, vous pouvez repiquer les fleurs dans le jardin (au cours de la prochaine période de botanique ?).

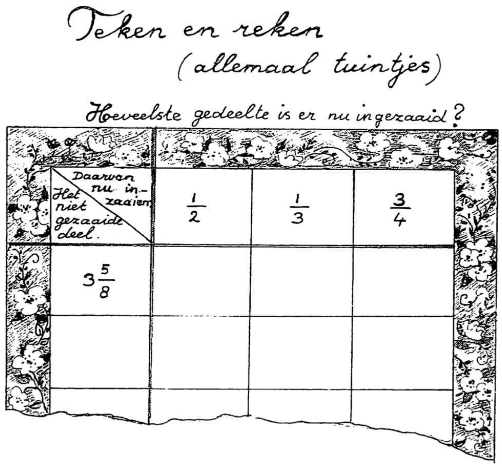
Préparez des exercices avec de nombreuses variantes, mais faites-le faire surtout aussi par les enfants. Ci-dessous, quelques exemples sous forme de feuilles de travail. Un avantage des feuilles de travail est que vous pouvez, grâce à la différenciation, donner des exercices aux enfants à leur capacités. Mais n'oubliez pas les moments d'enseignement avec toute la classe, avec explications et discussions.

Dessine et calcul (ce sont des petits jardins)

Quelle partie est ensemencée ?

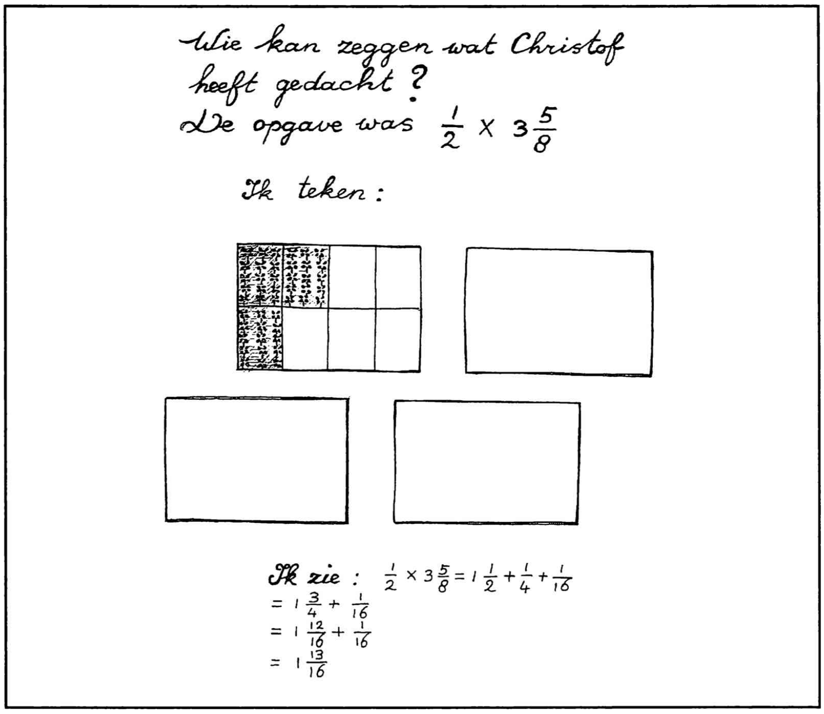
Verticalement : La partie qui n'est pas semée.

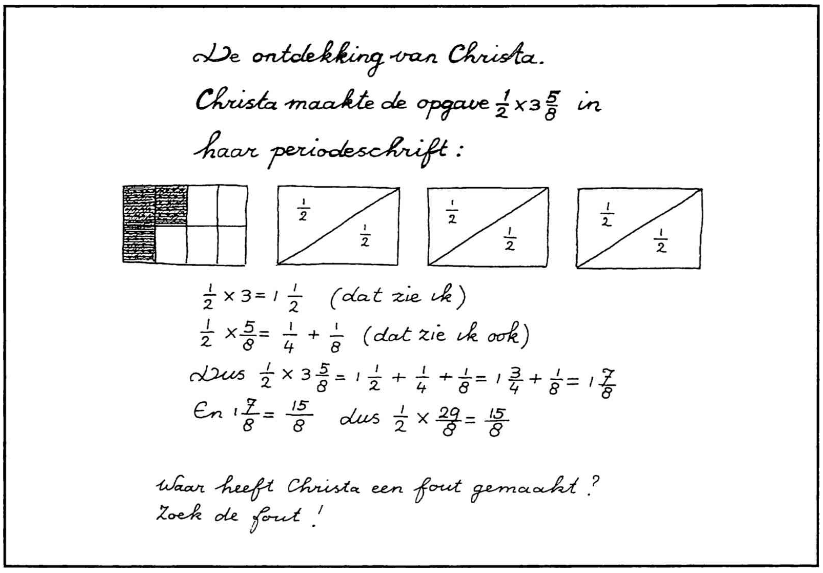
Horizontalement : De cette partie, on ensemence maintenant



« Essaie toi-même d'inventer un exercice avec des fractions ».

Deux idées de feuilles de travail





Première feuille :

Qui peut dire comment Christophe a procédé ?

La question était $= \frac{1}{2} \times 3\frac{5}{8}$

Je dessine :

...

Je vois :

Deuxième feuille :

Les découvertes de Christa.

Christa a répondu à la question $\frac{1}{2} \times 3\frac{5}{8}$ dans son cahier de période :

...

... (je le vois)

... (je le vois aussi)

Donc ...

Et ... donc ...

Où est-ce que Christa a fait une faute ?

Cherche la faute !

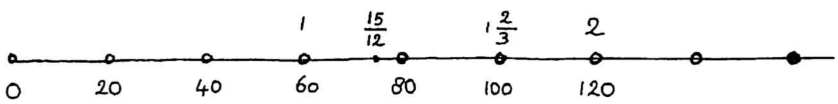
La plupart des enfants résolvent ce genre de problèmes en commençant par diviser toutes les parties des jardins qu'ils voient sur le dessin dans le nombre de parts indiqué, à les diviser en deux dans ce cas-ci. Après avoir visualisé la nouvelle fraction, ils en comptaient les parties. Ils trouvent alors $1\frac{1}{2} + \frac{5}{16}$! Plus tard, on voit les calculateurs habiles (observateurs ?) faire ces partages en sautant cette étape où l'on partage tout.

Terminez cette activité par une belle synthèse sur les multiplications. Par exemple, en partageant encore une grande tablette de chocolat structurées en parties.

Aspects méthodologiques

Pour les élèves qui restent accrochés sur la route, pensez au fait que l'on peut éliminer temporairement les fractions dans le cas des semis en utilisant des nombres de graines ou des prix, par exemple pour les « boites-jardins » ci-dessus, où les enfants devaient chercher combien sont $\frac{3}{4}$ de $1\frac{2}{3}$. Qu'est-ce qui est un bon prix pour les semences, par rapport au « tiers » et au « quart » ? Eh bien nous allons prendre 60€ (12€ c'est déjà bien aussi, mais pas obligatoire) pour l'ensemencement d'un semis. Ensemencer $\frac{1}{3}$ de semis coûte 20€. Donc, on a 40 autres euros pour le premier semis plus 60€ pour le second. Nous devons ensemencer $\frac{3}{4}$ de tout cela, ce qui coûte donc $\frac{3}{4} \times 100$€, c'est-à-dire 75€. Ensemencer un semis coûte 60€. Nous avons donc maintenant $\frac{75}{60}$ de semis ou encore $\frac{15}{12}$.

On peut également se risquer à utiliser ici la double ligne de nombres. Les semis sont donc traduits de manière abstraite en morceaux de ligne et les enfants travaillent dans ce cas à un niveau plus schématique :



Ensuite, nous avons encore eu une discussion de groupe sur ce qui se passe de manière précise lors de la multiplication de fractions. Si tout va bien, les enfants ont appris une règle de calcul par leur propre force et en la comprenant. Et non seulement cela, ils ont encore vu une fois de plus que dans « le calcul et les mathématiques » on peut non seulement compter sur l'enseignant, mais on peut aussi laisser parler son propre bon sens.

ADDITION, SOUSTRACTION, MULTIPLICATION ET DIVISION

Pendant les quatrième et cinquième classes, les enfants ont découvert les fractions et les opérations de base avec des fractions de toutes sortes de façons.
Ils connaissent maintenant les fractions sous la forme de :

- une partie d'un tout ($\frac{2}{3}$ de gâteau) ;
- une mesure ($2\frac{2}{3}$ mètres de tissu) ;
- un opérateur ($\frac{1}{2}$ de 3 litres de peinture a été utilisé) ;
- le résultat d'une répartition équitable (deux pizzas entre 5 personnes) ;
- l'expression d'un rapport ($\frac{3}{4}$ des filles ont les cheveux longs)[3].

3. Le rapport ressemble ici un peu trop à la partie d'un tout. L'idée du rapport est de comparer deux quantités. On exprime alors cette comparaison sous la forme d'un nombre. Comparons par exemple les deux parties ensemencées de violettes de deux jardins. Dans le mien, il y a deux sixièmes avec des violettes. Dans le tien, trois sixièmes. Mon jardin de violettes vaut les deux tiers du tien. Il ne faut bien sûr pas partir obligatoirement de fractions. Mon jardin de violettes a coûté 2 euros et le tien 3 euros. Le prix de mon jardin vaut les $\frac{2}{3}$ du tien. Dans l'exemple du livre, c'est le rapport entre les filles aux cheveux longs et l'ensemble des filles qui vaut $\frac{3}{4}$. Toute partie d'un tout entraîne automatiquement un rapport (entre la partie et le tout), mais pour comprendre l'idée du rapport, il faut comparer (NdT).

En cinquième classe, un certain nombre d'enfants utilisent encore, pour le calcul avec des fractions, l'aide concrète de l'enveloppe des fractions (les fractions de cercle, la bande, le rectangle à diviser). D'autres ont suffisamment de représentations intérieures pour reconnaître la signification des fractions dans les divers contextes verbaux et visuels.
Les enfants ont travaillé sur des problèmes dans une situation choisie (encore et toujours une histoire de calcul), dans laquelle les fractions ont toujours été des fractions concrètes. En outre, on a travaillé de façon mobile avec des suites de fractions et des fractions comme mesures. Celles-ci ont été exercées et utilisées dans des figures géométriques.
Les élèves ont découvert les calculs « purs » comme des descriptions de ces activités. L'addition et la soustraction sont pratiquées, et ensuite la multiplication et la division avec des nombres entiers comme opérateur (en fait des additions répétées et des partages « équitables »). Cela se produit naturellement lorsque les enfants parviennent à utiliser dans ces problèmes les modèles du cercle, de la bande et du rectangle qu'ils connaissent déjà.
Pour l'addition et la soustraction des fractions, la double ligne des nombres a été un outil pour trouver le dénominateur commun et l'utiliser.
Pour certains problèmes moins évidents, c'est un défi pour les enfants de cet âge que d'orienter eux-mêmes la résolution d'une bonne manière pour arriver à la solution en utilisant des fractions équivalentes.
Le choix d'une grandeur médiatrice n'est pas non plus toujours facile. Le choix d'une mesure de référence pratique pour les fractions concrètes, qui peut conduire à la bonne distribution en-dessous de la double ligne de nombres ($\frac{1}{4}$ d'euros comme 25 cents, $\frac{3}{5}$ de la distance de 60 km, ...), n'est pas encore évident pour tous les enfants.
En sixième année, le travail de ces problèmes durant les heures d'exercice de calcul devrait conduire à un choix autonome de ces grandeurs intermédiaires.

La multiplication et la division par des nombres entiers donnés comme opérateurs ne posent, comme on l'a dit, aucun problème. Mais à la fin de la cinquième classe, nous faisons aussi découvrir aux enfants la multiplication et la division par des fractions.
En ce qui concerne la multiplication, on peut voir ci-dessus l'exemple d'une structure de leçons (page 32). Pour cette introduction au principe de la multiplication par des fractions, l'exemple des semis n'a pas été choisi sans raison. La partie du semis non ensemencée peut servir de modèle pour d'autres tâches en tant que rectangle vide. Parce que chacun fait ses propres choix de semailles, les enfants découvrent assez vite qu'il y a beaucoup de possibilités pour partager. Ils apprennent donc à partager de manière efficace, en fonction des circonstances dans lesquelles la question est posée. Et ainsi, il devient possible de découvrir une règle formelle avant de pratiquer le calcul avec des fractions pures.

La division est plus difficile. De nombreuses générations d'élèves ont longtemps travaillé servilement avec la règle mal comprise « diviser par une fraction, c'est multiplier par la fraction inverse ». Il doit être clair que nous ne reprenons pas cette tradition ici. Diviser peut signifier autant rechercher un rapport (« division–contenance » ou « division–rapport ») que partager (« division–partage »). Il est facile de trouver des exemples concrets pour la division-rapport, mais pour la division–partage ce n'est pratiquement possible que lorsque l'on divise par un nombre entier.

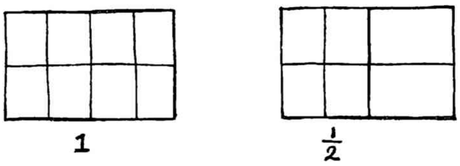
Partager $1\frac{1}{2}$ barre de chocolat en six ne pose plus de problèmes. En outre, les enfants comprennent que la partie que l'on reçoit est plus petite que la quantité initiale ! Dans une division (partage) par une fraction, la réponse peut être plus grande et de ce fait, à cet âge tout au moins, c'est un concept encore hors de portée pour la plupart des enfants. On laisse donc tomber cette idée.

C’est avec la division-rapport, que nous pouvons aller à la découverte de cette division.

C’est une chaude journée et nous voulons faire de la crème glacée. Nous avons trouvé une recette pour six personnes et, en classe, nous sommes 24 élèves. Après avoir adapter a recette, nous faisons une liste de courses. Nous devons acheter, entre autres, un litre de crème fouettée. « C’est pas à vendre », a tout de suite fait remarquer l’un des « connaisseurs » de la classe. La recherche a rapidement démarré : « Qu’est-ce qu’on trouve comme quantités ? » « $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$?! »". Les enfants savent immédiatement qu’il faut deux demi-litres. Si le laitier ne vend que des pots de $\frac{1}{8}$ de litre, il en faudra 8. (Tous les enfants ont trouvé les bonnes réponses, mais que cela avait quelque chose à voir avec la division par une fraction, cela ne leur est pas venu à l’esprit bien sûr).

Après avoir convenu de faire vraiment de la glace lors de la dernière heure de calcul , la classe a continué à calculer et est allée à la découverte de la division par des fractions.
Demander « Combien de fois y a-t-il de huitièmes de litres dans $1\frac{1}{2}$ litre » revient à rechercher le rapport entre les deux, c’est-à-dire $1\frac{1}{2} : \frac{1}{8}$. Comment pouvons-nous le faire apparaître visuellement ?
J’ai demandé aux enfants d’amener des bouteilles d’un litre. Nous y avons marqué les fractions en utilisant de l’eau dans un verre doseur (ils devaient d’abord convertir les mesures en fractions !).
Alors, les enfants ont pu remplir deux bouteilles avec $1\frac{1}{2}$ litre d’eau, et reverser cette eau dans des bouteilles en ne les remplissant que jusqu’à la marque $\frac{1}{8}$. Il nous est apparu que $1\frac{1}{2}$ litre donne douze bouteilles qui sont remplies jusqu’à $\frac{1}{8}$. Dans la discussion qui a suivi, nous étions d’accord que nous pouvions écrire cela sous forme de calcul $1\frac{1}{2} : \frac{1}{8}$.

Un des enfants a pensé qu’il valait mieux demander : « Combien de fois $\frac{1}{8}$ va dans $1\frac{1}{2}$. Cela ressemble aux petits jardins."



On peut voir une fois de plus à quel point le langage peut semer la confusion en ce qui concerne les fractions. Ici, « fois » fait référence à une division, alors que pour multiplier nous utilisons seulement « de », qui à son tour évoque un « partage ». C’est comme si les concepts partager et multiplier, en ce qui concerne les fractions plus petite que 1, prenaient la place l’un de l’autre. Ce qui n’est peut-être pas tellement surprenant puisque, dans la multiplication, on est habitué à ce que cela devienne plus grand et, dans la division, à ce que cela devienne plus petit.

Dans cette phase de division des fractions, il ne peut s’agir que d’acquérir de l’expérience dans la résolution de ces questions au travers de situations concrètes. Un certain nombre d’enfants y découvriront que, de manière miraculeuse, la réponse devient plus grande.

En demandant aux enfants de décrire la manière dont ils ont trouvé la réponse, on les rend conscients de leur propre cheminement. S’écouter mutuellement et discuter des solutions des uns et des autres, cela stimule la confiance envers les stratégies générales et personnelles, ce qui est particulièrement important pour la résolution des applications. Cela renforce encore la confiance dans leurs propres pensée et jugement qui s’éveillent précisément de plus en plus à l’approche de la sixième classe.

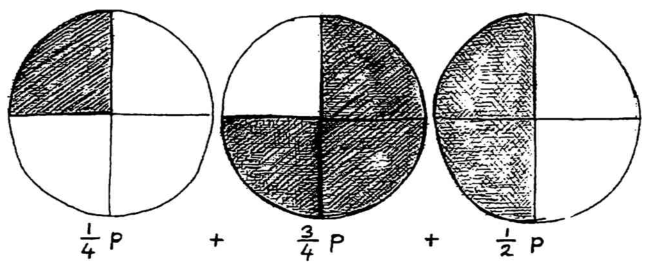
6 La pratique en 6^{e} classe

En sixième classe, il n'y a pas de période spéciale pour les fractions. L'apprentissage du calcul avec les fractions se poursuit dans de nombreux domaines. On y consacre du temps durant les heures d'exercices de calcul. Après l'introduction des nombres décimaux (fractions décimales) et du calcul des pourcentages, la découverte de l'algèbre se fait aussi en sixième classe. Cela peut être une idée intéressante d'introduction l'algèbre dans une période à partir de fractions concrètes. Il s'agit ici de la découverte du calcul littéral. Ainsi, de vieux exercices familiers (?) peuvent servir de point de départ significatif.

En sixième classe on continue à additionner, soustraire, multiplier et diviser des fractions. Cela peut être aussi introduit techniquement au moyen de la double ligne de nombres muette et des fractions concrètes. Avant cette étape, il est important de prendre son temps et de donner de l'espace aux enfants pour qu'ils puissent faire eux-mêmes des simplifications et passer – à leur propre rythme – des fractions concrètes sur la ligne de nombres au calcul formel avec des fractions « pures ».
Vous avez aussi la possibilité de passer en revue tout ce qui précède, ce qui a été fait en quatrième et en cinquième, où tous les problèmes ne conduisent pas à l'utilisation de la double ligne de nombres muette.
Beaucoup d'enfants qui, dans un enseignement traditionnel perdent le lien avec le reste de la classe, peuvent encore une fois résoudre d'une manière différente les problèmes, au niveau des fractions concrètes et de la double ligne de nombres.

Calcul littéral avec des fractions concrètes

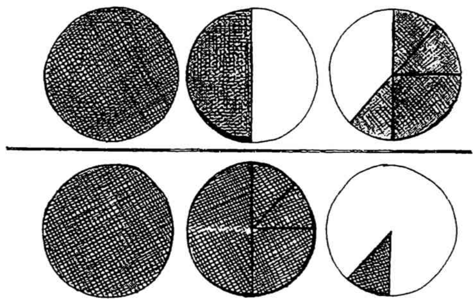
En sixième classe, où on vit la transition du travail avec des nombres au travail avec des lettres, cela vaut la peine de réfléchir à accompagner la description des fractions concrètes d'une lettre : $4 \times \frac{1}{8}B = \frac{4}{8}B$, où B signifie « Barre de chocolat ».
Pour le cas $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}B = \frac{1}{8}B$ l'utilité de la lettre est déjà apparente. La première fraction ($\frac{1}{2}$) indique un opérateur, la deuxième fraction ($\frac{1}{4}$) donne la partie de la barre, ce qui est rendu directement visible dans cette notation ($\frac{1}{4}B$).
Dans le cas de trois pizzas, on trouve très naturellement : $\frac{1}{4}P + \frac{3}{4}P + \frac{1}{2}P = 1\frac{1}{2}P$.



Cette réponse est représentée sur la figure ci-dessus. On peut facilement ajouter $\frac{1}{4}$ de pizza à $\frac{3}{4}$ de pizzas pour former une pizza entière.
On peut aussi penser P commet étant le prix d'une pizza par exemple 8€ : $\frac{1}{4} \times 8 + \frac{3}{4} \times 8 + \frac{1}{2} \times 8 = 12$€.
Quelle partie est-ce de huit euros ? La division donne $12 : 8 = 1\frac{1}{2}$.

L'idée de la grandeur intermédiaire apparaît ici une fois de plus et on rappelle qu'auparavant on en avait déjà parlé pour le cercle de « tours », « heures » et « degrés » (voir la partie sur la cinquième classe dans ce chapitre).

Au lieu de commencer par un dessin, nous avons commencé un jour par un petit problème : $1\frac{1}{2}c + \frac{5}{8}c = \ldots$*? Je leur ai raconté que ce n'était pas simplement un problème. C'était aussi une question d'imagination. « Pensez à autant de choses que vous que vous pourriez mettre à la place de c pour rendre le calcul facile. Vous pouvez aussi dessiner quand même. » La lettre* c *était mise pour « crêpe » :*



c *peut signifier « heure », mais ce n'est pas pratique à cause de* $\frac{5}{8}$.

c *peut signifier une année de 360 jours :*

$1\frac{1}{3}360 + \frac{5}{8}360 = 360 + 180 + 5x45 = 765$ *jours.*

Maintenant, il faut encore diviser $765 : 360 = 2$ *ans et 45 jours, ou* $2\frac{1}{8}$ *ans.*

c *peut signifier 16 €*

c *peut signifier 1 €.*

c *peut signifier une longueur de natation de 40 mètres*

c *peut signifier une barre de chocolat :*

c *peut signifier une bande*

Tous ces c *peuvent également être représentés avec des dessins et des figures.*

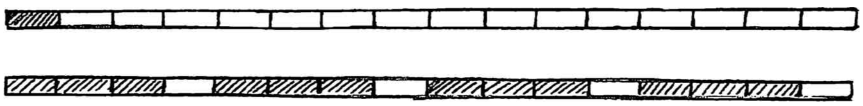
Il peut être très utile aussi d'imaginer non seulement des grandeurs intermédiaires, mais aussi des situations dans lesquelles elles peuvent apparaître. On peut poser la question : « Inventez une histoire pour ce problème." Par exemple, dans le problème $\frac{1}{16} + \frac{3}{4} = \ldots$

Première histoire : Le nouveau terrain prévu pour les jardins familiaux a été divisé en 48 parts ayant exactement la même superficie. Les inscriptions ont commencé cette semaine. Lors de la première heure $\frac{1}{16}$ a été attribué, et le reste de la première journée, ce sont trois quarts des jardins qui ont été loués.
Quelle est la partie totale du terrain qui a été louée durant cette première journée ?

$$\frac{1}{16}T + \frac{3}{4}T = \frac{1}{16} \times 48 + \frac{3}{4} \times 48 = 3 + 36 = 39. \text{ C'est donc } \frac{39}{48} = \frac{13}{16}.$$

Ceux qui veulent peuvent également trouver une résolution graphique.

Deuxième histoire : Il y a un trajet de 80 km à faire. Quand on a parcouru $\frac{1}{16}$ du trajet, puis ensuite $\frac{3}{4}$, quelle partie du chemin a-t-on déjà parcouru ?



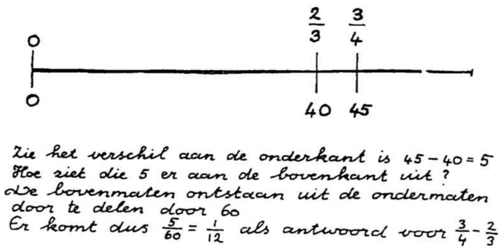
Sur le dessin, il faut encore remettre ensemble les différents morceaux. On peut aussi le faire sans dessin en calculant : on parcourt d'abord 5 km, puis 60 km. Au total, $65 : 80 = 13/16$.

Troisième histoire : $\frac{1}{6}b + \frac{3}{4}b = \ldots$; b représente une boîte contenant 160 bougies, avec $\frac{1}{16}$ de bougies blanches et $\frac{3}{4}$ de bougies rouges ...

La double ligne de nombres

Tout en travaillant avec des fractions concrètes, on utilise à nouveau le modèle de la double ligne de nombres muette dont on a déjà parlé. Il est temps maintenant d'aller un peu plus loin. L'élastique des fraction peut rester éventuellement en arrière-plan en tant que représentation concrète et peut encore rendre de bons services.
Sur la double ligne de nombres muette, on peut toujours choisir l'unité (voir la partie sur la ligne muette des nombres dans le chapitre 3 sur le calcul à partir de la 2e classe). Ensuite, un nombre choisi selon les fractions dont il est question est mis en correspondance avec l'unité. Ceci crée deux échelles :

On voit que la différence en dessous est $45 - 40 = 6$.
Comment est-ce qu'on retrouve cette différence au-dessus ?
Les nombres du dessus se calculent en divisant ceux du dessous par 60.
On a donc : $\frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ *comme réponse pour* $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$



Il vaut mieux présenter ce calcul au moyen de fractions concrètes : $\frac{3}{4}u - \frac{2}{3}u = ...$ Dans la solution ci-dessus on a ensuite choisi $u = 60$ (une heure, ou 60 kilomètres, ou ...) ; $\frac{3}{4}u$ devient alors $\frac{3}{4} \times 60 = 45$.

Bien sûr, dans le calcul ci-dessus, on aurait pu prendre une unité plus « économique » comme 12. Mais en se basant sur la double ligne de nombres, on ne doit pas toujours donner la priorité à la solution la plus économique. Pour les calculateurs lents, la recherche du plus économique peut être un handicap supplémentaire. Chacun devrait avoir le temps de trouver ses propres inventions.

La double ligne de nombre muette n'est pas un phénomène entièrement nouveau dans les leçons de calcul. Dans de nombreuses situations, il y avait déjà eu des raisons de penser à deux « niveaux » :

- La voiture consomme 1 ℓ par 16 km [?] (distance et la consommation de carburant). ?
- Les pommes de terre coûtent 5,00€ par sac de 2,5 kg (poids et prix).
- Durant l'hiver, nous utilisons en moyenne 20 m^3 de gaz par jour (volume et temps).
- Il a fait constamment des tours de 38 secondes (distance et temps).
- Nous avons roulé en direction du Nord avec une vitesse de 100 km/h (distance et temps).
- Pour faire une tasse café, il faut mettre 2 petites cuillères de café dans l'appareil (masse et contenu).
- Cet objectif a un facteur de grossissement de 3 (longueur réelle et longueur perçue).
- La densité de population est de 350 (nombre de personnes et superficie).

Dans ce contexte, nous nous trouvons sur le terrain des rapports. Ils sont abordés en détail dans le chapitre 6 où l'on introduit aussi les tableaux de proportionnalité qui sont une sorte de prolongation de la double ligne de nombres mais qui ne se mettent pas facilement en images et sont plutôt un moyen de calcul proche des algorithmes.