Sur le chemin du calcul

Traduction du deuxième chapitre du livre *Rekenen in beweging**.

Version du 22 octobre 2022

Dans ce chapitre, certaines notions sont utilisées sans être vraiment introduites (démarches analytique et synthétique – éléments actifs et passifs d'une opération). Pour approfondir ces concepts, le lecteur peut se référer par exemple au texte *Les quatre opérations et les tempéraments* disponible sur le même site que cette traduction. Certains commentaires ont été également ajoutés par le traducteur en fin du chapitre. Lors des passages concernés, on y fera référence par une note de bas de page.

> Certains commentaires expriment le point de vue d'une pédagogie dite réaliste qui est extérieur à la pédagogie Waldorf. Ces commentaires sont présents dans le texte original et sont caractérisés par la ligne à gauche du texte comme dans ce paragraphe.

*Éditeur : Reklamestudio Kees Kuiphof bNO, Ede, 1994.

Auteurs : Kees van Broekhuizen, Fred Goffree, Frank de Kiefte, Jan Kraamwinkel, Peter Landweer, Paul van Meurs, Job de Raadt, Kees Verhage, Pieter Witvliet, Annemieke Zwart.

Traduction : Luc Lismont.

Toutes les remarques permettant d'améliorer cette traduction (style, orthographe, passage peu clair ou incompréhensible. . .) sont les bienvenues. Merci de les communiquer à Luc Lismont.

1 Les premiers cours de calcul

Celui qui enseigne aux enfants à calculer agit également sur leur personnalité. Lorsque l'on apprend à calculer aux enfants, on doit donc se demander ce que l'on éveille en eux. Peut-être nous adressons-nous à des forces qui rendent l'enfant calculateur, magouilleur, égoïste ... ? Ou pouvons-nous, par le calcul, développer d'autres forces, peut-être plus nobles ?
Pour l'enseignant des écoles Waldorf, la matière n'est pas seulement une fin en soi, c'est surtout un moyen qui agit sur le développement des enfants. Cette action concerne différents aspects du corps, de l'âme et de l'esprit. Ces trois domaines requièrent chacun leurs soins, leur nourriture, leur éducation. Rudolf Steiner attachait donc une grande importance à la manière dont les enfants commencent l'apprentissage du calcul. Il voyait un lien direct entre la pensée matérialiste de son époque et l'éducation mathématique qui avait cours à ce moment.

Dans l'âme, il existe une tendance naturelle à différencier toujours plus les expériences. L'attitude naturelle de l'enfant est analytique. Un calcul comme $2 + 5 + 3 = ...$ ne correspond pas à cela. Un tel exercice ne laisse aucune marge de liberté, celui qui calcule doit se conformer aux règles de l'addition.

> Du point de vue de la didactique réaliste, on peut s'attendre à la remarque suivante : les enfants ont une marge de liberté lorsqu'ils abordent un calcul comme $2 + 5 + 3$. Un élève pense $2 + 3 = 5$ et connaît le double $5 + 5 = 10$. Un autre voit 7 dans $2 + 5$ et compte $7 + 3 = 10$. Il y en a peut-être aussi un qui commence par la fin et arrive à $8 + 2 = 10$. Il y a peut-être des élèves qui pensent en « images numériques » et qui, avec $2 + 5 + 3$, voient en une fois la réponse à ce calcul. On trouve des variations suffisantes et il appartient à l'enseignant d'offrir de l'espace, ou même plus d'encourager les enfants à chercher.

En partant de la question : « dix, qu'est-ce que cela peut être ? », on part à la recherche d'additions qui ont 10 comme résultat ($10 = ... + ... + ...$). On peut alors décomposer le tout avec toutes sortes de structures, selon son propre choix. Avec cette approche analytique, il y a une activité intérieure libre. De cette manière, on rencontre de manière positive le besoin de l'enfant d'analyser, de déconstruire des ensembles.

Avec cette manière de faire, nous allons *du tout vers les parties*. Nous mettons l'accent dans l'addition sur le résultat, dans lequel les parties sont en fait déjà incluses. De cette façon, nous amenons l'enfant d'abord à voir l'ensemble, et non pas à suivre toujours le chemin menant d'une quantité moindre à une quantité plus grande. C'est ce qui est fondamentalement formateur : on n'éveille pas chez l'enfant de besoin dans lequel prédomine le désir d'avoir toujours plus. Steiner soutient qu'au contraire, l'enfant développe ainsi la modestie et la modération.

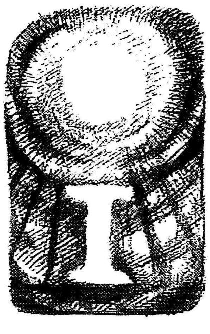
Dans le calcul, lorsque l'on part d'un tout, d'une totalité, on s'aligne sur la manière dont l'enfant vit la réalité. Après tout, il n'expérimente souvent que des nombres entiers et il devient alors possible pour lui d'en distinguer des parties. Lorsque l'on aborde d'abord le besoin naturel d'analyse de l'enfant, le corps éthérique se met en mouvement de sorte que la pensée naissante – qui est toujours une transformation des forces éthériques – peut se développer librement. C'est seulement dans une seconde étape qu'est ajoutée la question de la reconstitution de ce qui a été différencié, c'est-à-dire la synthèse. Mais, dans ce type calcul, il ne faut pas non plus tomber dans une forme d'unilatéralisme.

Ces considérations sont à la base de la première période de calcul de la première classe de l'école Waldorf.

Le premier jour d'école, l'enseignant promet à ses enfants qu'il leur apprendra à calculer, comme le font les grandes personnes. Maintenant, on y est ! C'est un grand moment pour les enfants.

« Aujourd'hui, nous allons apprendre à calculer. »
« Moi, je sais déjà, vous savez : un et un, ça fait deux ; deux et deux quatre. » Et cela a continué ainsi avec huit, avec dix, avec 100, et même avec 1000. Si vous laissez aller les choses de cette façon, certains enfants peuvent, en commençant à 1, parcourir un long chemin, parfois jusqu'à 100. Alors presque toujours, cela se poursuit : un cent, deux cents ...
« Non, ce n'est pas comme cela que les grandes personnes disent, je vais encore t'apprendre comment le dire. Qui connaît des grand nombres? »
« Mille, trois mille, cent mille. » (Il est frappant de noter que ce sont d'abord de beaux chiffres ronds qui ont d'abord été dits. Les enfants donnent rarement un nombre comme 893).
Et puis la question inévitable : « Qui connaît le plus grand nombre ? » « Trente milliards vingt ?! » « Non. » Silence après d'autres propositions possibles ou impossibles.
« C'est incalculable »
« Qu'est-ce que ça veut dire incalculable ? »
« Compter tant que tu vis »
« Ce n'est pas encore le plus grand ! »
« Un nombre incalculable de fois un nombre incalculable »
En tant qu'enseignant, vous êtes toujours surpris par l'inventivité des enfants dans ce domaine. Mais maintenant, vous êtes sur une autre piste et vous dites : « Même pas ».
« Je vais vous montrer. »

Est-ce qu'il faut demander le « plus grand » nombre ou doit-on juste partir de l'indivisibilité de l'unité [1] ? En suivant un exemple de Rudolf Steiner, on peut très bien laisser l'enfant expérimenter la différence entre quelque chose dont on ne possède qu'un seul exemplaire et une véritable unité. Vous pouvez diviser un morceau de bois en morceaux, mais pas l'homme lui-même qui est une unité indivisible.



La question est souvent aussi posée de la manière suivante : « Qu'est-ce qui est unique dans le monde ? » Habituellement, ce sont les grandes « unités » qui apparaissent : Dieu, le Soleil, la Lune, l'océan, ou bien un enfant dit : « Il n'y a qu'un seul Pierre et c'est moi ! »

C'est en fonction de sa classe que l'enseignant doit décider combien de nombres il peut traiter. La première semaine, les nombres de un à sept peuvent arriver tour à tour. La question est de savoir s'il faut aller plus loin que sept.

1. C'est une tradition fréquente dans les écoles Waldorf de dire que le nombre le plus grand est 1 (NdT).

Les dessins que les enfants réalisent à partir de ces nombres peuvent constituer le début du premier cahier de période de calcul.

Écrire les nombres jusqu'à 10

Lorsque l'on passe à l'écriture des nombres, on peut convenir avec les enfants de dessiner un I pour le 1 et d'indiquer les deux avec II. De cette manière, on parvient à une notation que l'enfant aurait pu concevoir lui-même, car dans le geste du II, par exemple, il retrouve sa propre paire de bras ou de jambes. Et quand l'enfant regarde le chien du voisin, on découvre que l'on peut écrire le quatre comme ceci : IIII. De cette façon, on peut tirer de la vie quotidienne la structure et la manière d'écrire des nombres avec les chiffres romains [2].

Compter jusqu'à dix

Pour apprendre la suite de nombres naturels aux enfants, on commence par se demander quel est le point de départ. Commence-t-on avec rien en ajoutant un à chaque fois : le 1, suivi par 2, 3, 4, 5... ? Ou commence-t-on avec une unité plus grande, par exemple les dix doigts ? Dans ce cas, on commencera par compter en arrière...

Réciter des comptines ou chanter des chansons est bien sûr à pratiquer !
Les enfants apprennent la chanson suivante :

Il y avait dix petit pots de verre

Il y avait dix petits pots verts dans une armoire en verre

Il y avait dix petits pots verts dans une armoire en verre

Et quand un des petits pots vert est tombé

Il y avait neuf petits pots verts dans une armoire en verre

Les enfants se placent en cercle et, lors de la phrase « Il y avait dix pots verts dans la vitrine », ils montrent leurs dix doigts. Un petit saut de côté en cercle rend l'activité plus dansante. Et oui, un pot doit disparaître : « Et quand un des petits pots verts est tombé... ». Les enfants lèvent alors un doigt et font un petit saut, de manière à se retrouver en position accroupie sur un genou. Il y a beaucoup de mouvement, mais cela passe vite, car le chant se poursuit avec : « ... il y avait neuf petits pots verts dans la vitrine »! Ce faisant, les enfants montrent maintenant neuf doigts, avec lesquels ils se lèvent lentement. Ils continuent ensuite avec l'inévitable disparition de tous les bocaux de la vitrine.
À la fin de la chanson, les enfants s'assoient par terre, fatigués d'avoir sauté, chanté et montré leurs doigts : « il n'y a plus de petits pots verts dans la vitrine ». Une petite pause s'impose, puis ils se lèvent :
« Mais aucun n'était tombé de la vitrine
Mais aucun n'était tombé de la vitrine

2. Il n'est malheureusement pas question dans ce chapitre de l'introduction des chiffres indo-arabes. Dans les commentaires en fin de chapitre page 41, on trouvera quelques réflexions à ce sujet

Et parce que, heureusement, rien n'a été cassé
Il y a dix petits pots verts dans la vitrine ».

Lorsque l'on compte, il est important non seulement de se concentrer sur la séquence des nombres, mais aussi de se demander comment faire participer les forces formatrices de l'enfant. Cela est possible en mettant l'accent sur l'élément rythmique du comptage.

Rudolf Steiner fait remarquer que l'on peut faire appel à cette qualité (c'est-à-dire au rythme) en faisant marcher les enfants comme exercice de mouvement : 1 – **2** 1 – **2** 1 – **2**, avec une accentuation du pied sur le 2. Et ainsi de suite avec 1 – 2 – **3** ou 1 – 2 – 3– **4**. De cette façon, nous développons d'abord le rythme, afin de poursuivre le comptage et de le développer à partir de ce rythme et de le faire vivre comme un tout.

Parce que le comptage et le calcul sont vécus par nous, adultes, comme quelque chose qui appartient typiquement à la pensée, nous avons tendance à laisser notre didactique se teinter de pensée abstraite également. Cela ne fait pas de mal de toujours se demander où le calcul s'ancre-t-il dans l'être humain.
Rudolf Steiner fait remarquer que, bien que le calcul ait été « créé » par l'homme lui-même, ce même homme compte « intérieurement » en réalité en parcourant ses doigts (jusqu'à dix) et ses orteils (jusqu'à vingt) lorsqu'il compte. Aujourd'hui encore, il est courant dans certaines cultures d'indiquer les nombres, même lorsqu'ils sont plus importants, en se touchant certains endroits du corps. La tête n'est que l'observateur de ce comptage intérieur et concret.

Après avoir interprété la chanson « Dix petits pots verts... » plusieurs fois, de plus en plus de phrases « il y en avait encore neuf », « encore huit », etc, ont été omises. Et le couplet final « il y avait dix bocaux verts dans la vitrine », peut facilement s'adapter en « il y avait 1, 2, 3, 4, S, 6, 7, 8, 9, 10 bocaux verts dans la vitrine ! »
Toutes les formes de mouvement possibles peuvent maintenant être développées pour apprendre à compter rythmiquement, de sorte que nous pouvons dire que la ligne des nombres est explorée « acoustiquement ». Beaucoup d'autres activités doivent encore prendre place afin de pouvoir compter « à partir du résultat » avant d'aborder les opérations.

Le concept de nombre

La notion de nombre doit également être développée. Pour cela, vous pouvez par exemple utiliser des marrons à l'automne, lorsque la première période de calcul commence souvent.
Vous en donnez dix à chacun des enfants et leur demandez de faire une belle forme. Pour certains, cela signifie une fleur ou une guirlande. D'autres créent deux rangées de cinq/cinq rangées de deux. Vous dites : « Regardez, dix c'est deux rangées de cinq et cinq rangées de deux. »
Par exemple, la fleur peut être composée de 4 et de 6. En séparant les marrons en différentes quantités, les enfants découvrent les nombreuses divisions de 10, ou de 8, ou de 16, selon la quantité de départ. Ce nombre, 10, 8, 16... est toujours l'unité qui est ensuite divisée. De telles actions concrètes avec des marrons offrent d'innombrables possibilités de dessiner ces divisions dans le cahier (après).

En travaillant ainsi, à partir des principes formulés par Rudolf Steiner, on trouve une richesse incroyable de possibilités et de méthodes de travail. Cela permet aux enfants de vivre les nombres rythmiquement, de diviser concrètement, de dessiner, de chanter ou de les exprimer oralement, en partant du tout. Après cela, vous pouvez poursuivre en préparant l'introduction des principales opérations.

2 Qualités

Lors de l'enseignement des nombres en première classe, nous prenons en compte les différences qualitatives entre les nombres. D'abord, nous amenons l'enfant à vivre le 1 comme un tout indivisible. Le 1 comme archétype de la totalité peut alors être la source d'où se reconnaissent les structures. Les autres nombres surgissent maintenant comme une articulation dans cette totalité. Chaque nombre peut avoir son propre caractère, sa propre qualité.

Lors de la première leçon de mathématiques, vous demandez aux enfants : « De quoi n'y en a-t-il qu'un dans le monde ? » Vous vous êtes préparé pour cela. Mais à la maison, vous ne pouvez pas deviner si la classe parlera du nez au milieu de votre visage ou du Soleil dans le ciel bleu.
Vous posez donc la question et la classe choisit la voie solaire. Cela donne le ton pour toute la semaine. Après le Soleil, la Lune et la Terre – et aussi ma tête, ma poupée, jusqu'à « j'ai eu un nouveau vélo » – on parle même de Dieu, et d'un seul ciel, dans lequel on retrouve au passage les mots univers et cosmos.

Le deuxième jour, la question porte sur l'omniprésence du 2. Maintenant que le regard est déjà tourné vers le haut, c'est le caractère dual du Soleil et de la Lune, du jour et de la nuit qui se manifeste. C'est une merveilleuse matière à laquelle consacrer une page du cahier de période, tandis qu'une autre page est également remplie de la dualité de l'homme lui-même : deux bras, deux jambes ; mais aussi rire et pleurer. Beaucoup de matière à raconter, car les contrastes haut-bas, beau-laid se présentent. Puis j'ose terminer la conversation par « Être ou ne pas être, telle est la question ».

Le troisième jour, je suis un peu plus inquiet, car je ne vois pas encore le Père, le Fils et l'Esprit se présenter, alors que cuillère, couteau et fourchette sont un peu insipides après ces derniers jours. Il faut alors provoquer les réactions de la classe : « De quoi est-ce qu'on trouve trois *dans le monde ? » Un garçon dit : « Les feux de circulation ». La classe est d'accord. Beaucoup de manifestations d'approbation, car personne n'y avait pensé. Je vois la lumière passer devant moi du vert à l'orange et soudain je réalise aussi pourquoi cette réponse est si remarquablement bonne. Le feu de circulation a à voir avec le passage d'une situation à une autre. Cet orange n'est pas une décoration, c'est le pivot entre l'arrêt et la conduite. Maintenant, je peux aider davantage les enfants. Et nous arrivons à l'avant-bras, au coude, au haut du bras ; le même principe dans la jambe ; à la tête, au torse et aux membres et à moi, toi et lui.*

J'observe où nous mène le chemin. D'abord la grande unité du cosmique, puis la dualité de l'obscurité et de la lumière, du ciel et de la terre. Troisièmement, nous en venons à l'homme tel qu'il vit, créé à l'image de Dieu, sur la terre.

Pour le quatrième jour, la piste est maintenant dégagée. Avec le quatre, nous arrivons sur terre. Et les enfants dessinent les pieds d'un cheval, les pieds d'une table et les quatre murs solides d'une maison.

Le cinquième jour, nous voyons une étoile à cinq branches dans la pomme et aussi dans l'être humain avec la tête, le pied, le bras, le bras et le pied : maintenant l'être humain se tient debout et regarde vers le monde.

Le six nous amène aux alvéoles des abeilles, mais je fais aussi dessiner aux enfants une image d'une étoile à six branches, car je veux avoir la pénétration d'en bas et d'en haut – bien que je n'en dise rien – aussi dans les cahier.

Le septième jour est de nouveau plus clair. Le sept nous amène aux jours de la semaine. Puis je raconte aussi que ces jours ont à voir avec le Soleil et la Lune, avec Mars, et Vénus et les autres planètes, et nous faisons un beau dessin de sept cercles concentriques. J'ai laissé le huit et les nombres suivants tranquilles. J'ai remarqué que la classe en avait assez.

Mais j'ai fini par douze, car les mois de l'année, les heures de l'horloge et le grand cercle des signes du zodiaque dans le ciel se sont présentés comme la conclusion évidente de notre voyage de recherche sur les *nombres. Y a-t-il eu un moment où les enfants étaient aussi avides d'apprendre, où ils ont autant appris que lors de leur première période d'arithmétique ?*

Et dix ? Je le pratiquais quotidiennement en comptant en marchant et sur les doigts. Je n'ai pas cherché d'image pour cela. Cela me semblait assez concret.

Lorsqu'il s'agit de nombres, une autre distinction peut être faite. Strictement parlant, les nombres qui expriment une qualité ne peuvent pas être comptés. Cela n'est possible que si nous les considérons comme des quantités. C'est la raison qui choisit une mesure, une unité pour mesurer la quantité. Le passage de « plus », de « beaucoup », à « combien » est un seuil dans le développement.
L'attention portée aux quantités conduit également à la notion de structure. Les enfants y sont sensibles et peuvent apprécier les belles structures. Mais il y a plus. La reconnaissance d'une structure telle que la division en douze parties égales sur un cadran, peut aider ultérieurement à l'addition et à la multiplication. Prenons, par exemple, la division de l'heure en quatre quarts, un cercle avec quatre quartiers. Il n'est pas difficile d'évoquer cette image pour trouver, par exemple, que $12 = 4 \times 3$, que $60 = 4 \times 15$, que $60 : 4 = 15$, ou que $15 + 45 = 60$ et ainsi de suite, et cela sans calculs compliqués. Les nombres 12 et 60 ont donc leur propre *qualité*, la mesure du temps leur donne une *signification*, l'horloge *montre* les structures.

Les enfants peuvent aussi être encouragés à arriver eux-mêmes à des nombres en choisissant leurs décompositions. Un exemple pour clarifier ce que l'on entend par là :

Nous nous tenons debout avec la classe en cercle autour des tables. « Et maintenant, vous allez tous rejoindre vos sièges en douze étapes ; douze ni plus ni moins. » Un peu de chaos et ensuite tout le monde est à sa place.

Douze est un point de départ, un tout, dans lequel les douze étapes apparaissent comme une « mesure ». Mais j'aurais aussi pu demander neuf, dix ou treize étapes.

Les observations suivantes montrent que les enfants n'apprennent pas toujours la notion de nombre en comptant :

Wilma met des pierres dans son seau.
Wilma : « Un, deux, trois. »
Moi : « Donne-m'en deux ! »
Wilma : « Je ne sais plus lequel est le deux. »
(Wilma interprète les nombres comme des noms.)

Dans le gymnase, on joue à une sorte de jeu de l'oie.
Diana est considérée comme le numéro trois.
Quand c'est son tour, elle lance « quatre ».
« Hé, dit-elle. Comment c'est possible, je suis le numéro 3. »
(Ici, « nombre ordinal » et « mesure » sont confondus.)

On peut déduire de ces observations qu'il faut donner du temps aux enfants pour qu'ils acquièrent un sens différencié des nombres. Une approche qualitative, dans laquelle on ne présuppose pas la capacité de comptage, crée un tel espace. La prise en compte des qualités et l'apprentissage du comptage contribuent à l'acquisition des concepts du nombre : nombre cardinal (quantité), nombre ordinal (comptage) et mesure.

Robbie, le phoque malicieux
Les enfants ont une grosse poignée de coquillages sur leur banc. Aujourd'hui, ils sont des dauphins qui ont récolté de la nourriture. Il y en a trop pour les compter. Robbie, le phoque malicieux, erre dans la classe. À intervalles réguliers, il s'immobilise devant l'un des dauphins. Le dauphin doit fermer les yeux, car il ne peut pas voir combien de coquillages Robbie emporte avec lui. Mais si, par la suite, il devine exactement combien Robbie en a pris, alors ils lui sont rendus. Sinon, le dauphin les perd vraiment.
Au début, l'espiègle phoque prend et garde beaucoup de coquillages. Il rit à gorge déployée quand il voit les dauphins. Mais soudain, il y a un dauphin, qui organise ses coquillages en un joli motif sur sa table. Et quand Robbie en prend, le malin peut dire exactement combien il en manque. Cette technique est rapidement copiée par d'autres. Robbie n'a plus nulle part où aller...

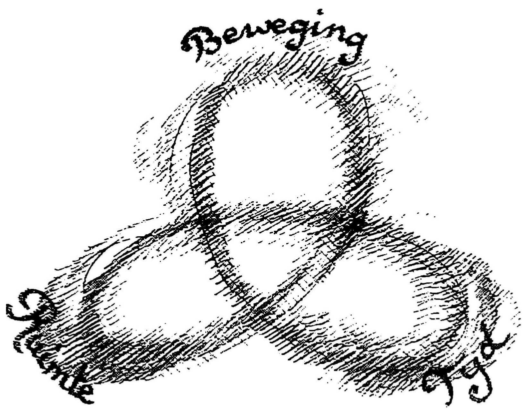
Avec cette invention didactique, l'enseignant a provoqué la structuration des quantités. Il ne s'agit pas de faire de beaux motifs parce que le professeur vous le demande, mais parce que vous en voyez le sens.

3 Compter, les nombres, suites de nombres et ligne des nombres

Sur la table devant Marieke, il y avait sept belles pierres qu'elle devait compter.
Enthousiaste, elle commença par ranger les pierres en ligne avec le plus grand soin, avant de les compter : « Six ». Pour ne pas réagir immédiatement à cette mauvaise réponse, la maîtresse remit les pierre en désordre sur table, en les éloignant les unes des autres, et elle reposa la même question. Cette fois encore Marieke rangea parfaitement toutes les pierres rangées et les compta à nouveau : « Six ». Alors, la maîtresse a compté clairement devant elle et c'était visiblement sept. Avec un visage de « oui, mais c'est pas comme cela qu'il faut compter », Marieke enleva résolument une des pierres et dit : « Six, parce que celle-là, elle n'est pas belle ».

L'enseignant peut pousser un soupir de soulagement : Marieke sait quand même compter.
On perçoit clairement lors de tels vécus que pour les plus jeunes élèves de l'école, la vie est entièrement « qualité » et que la quantité n'est pas encore vraiment vivante.
Apprendre à connaître les nombres en termes qualitatifs, en commençant par 1, comme cela se fait durant la première période de calcul, est quelque chose que tous les enfants ressentent intérieurement et donc comprennent. Cela provient de ce qui est présent en tant que possibilités naturelles (mathématiques) dans l'homme et dans la vie. Durant le processus d'apprentissage, on peut encore percevoir chez les enfants ce lien avec l'origine du monde des nombres.
Ensuite, nous commençons à compter. À partir du mouvement, nous allons parcourir avec les enfants « le chemin vers la Terre ». À chaque mouvement, c'est le pied spirituel et non matériel qui marque une étape dans l'existence terrestre. Au final, ce principe de mouvement conduira à un comptage purement quantitatif.

Grâce à des chansons, des comptines et des exercices rythmiques, les enfants apprennent les noms des nombres et leur ordre. Ce premier comptage, parfois appelé *comptage acoustique*, reste indépendant de la qualité des nombres et des quantités. Dans ce comptage, les enfants ne sont pas éveillés. C'est merveilleux, on peut même rêver de jour comme de nuit au rythme de cette suite et, en même temps, on peut « se réveiller » la nuit pour la dire ; sans aucun doute toute la suite des nombres peut se dérouler les yeux fermés !



Mouvement

Espace *Temps*

Si nous ajoutons du mouvement à ce comptage, plus précisément si nous ajoutons ce comptage au mouvement, il y a quelque chose de nouveau qui apparaît : un compter qui possède un aspect quantitatif. On peut penser à des jeux tels que « Les arbres se balancent », « les sept sauts[3] » et à des exercices comme « combien de pas faut-il pour arriver à la porte ? » qui appartiennent à ce type de comptage.

Le principe originel du mouvement se trouve dans tout ce qui est vivant, ce qui bouge complètement en soi et à partir de soi. Le mouvement de l'homme, et donc celui des enfants, est la conséquence directe de ce principe primordial qui est présent en eux. Le mouvement dirigé est aussi la force avec laquelle l'enfant veut tout faire dans sa jeune vie sur Terre.
Lorsque les enfants bougent pendant un jeu ou un exercice, ils changent de place dans l'espace partiellement ou totalement. Chaque mouvement dure aussi un certain temps. Tout mouvement sur la Terre relie directement l'espace et le temps.

La but du mouvement joue également un rôle dans son impulsion. Dans un jeu ou un exercice, le mouvement possède aussi sa finalité. Le « bouger » est alors un intervalle entre le début et la fin (état de repos). Quand nous faisons compter par les enfants le nombre de pas jusqu'au mur,

3. *Avez-vous entendu parler des sept sauts ?*

On tourne en cercle en chantant la chanson. Sur « et c'est 1 » on fait en pas en avant et on s'arrête en mettant une jambe en avant. Après cela, on recommence à chanter la chanson en tournant. Un nombre est ajouté à chaque fois. Chaque nombre a son propre mouvement.

1 : une jambe en avant
2 : l'autre jambe en avant
3 : se mettre sur un genou
4 : se mettre sur l'autre genou
5 : s'appuyer sur un coude
6 : s'appuyer sur l'autre coude
7 : se coucher sur le sol avec la tête entre les bras.

Voici une traduction de la chanson :

Avez-vous entendu parler des sept, des sept
Avez-vous entendu parler des sept sauts ?
Il dit que je ne peux pas danser
Mais je peux danser comme un noble
Et c'est 1

Avez-vous entendu parler des sept, des sept
Avez-vous entendu parler des sept sauts ?
Il dit que je ne peux pas danser
Mais je peux danser comme un noble
Et c'est 1, et c'est 2

Avez-vous...
...
Et c'est 1, et c'est 2, et c'est 3

Et ainsi de suite.

Voici un lien vers une vidéo avec cette chanson : https://www.youtube.com/watch?v=wJzfnUoO2v4 ils comptent en fait les intervalles entre le commencement et la fin du pas. *Ce comptage est la superposition, au mouvement dans l'espace (et dans le temps), de la suite des nombres.* Du point de vue didactique, nous avons affaire ici à des *nombres–mesures* (voir la cinquième classe) [4].

Nous utilisons le même type de comptage lorsque nous avons affaire au temps, lorsque nous considérons par exemple le mouvement de l'ombre du cadran solaire dans la cour de l'école ou le mouvement des aiguilles de la montre : si la grande aiguille tourne une fois, cela dure 1 heure.

Les enfants connaissent encore une autre façon de compter, pour laquelle nous utilisons les mêmes nombres : « J'ai cinq doigts sur chaque main, j'ai dix doigts de pied, j'ai deux yeux », etc.

Nous sortons avec la classe pour ramasser des marrons, des glands ou des cailloux. « J'en ai mille, Maîtresse. » De retour dans la classe, les enfants prennent un certain nombre de marrons sur la table, qu'ils peuvent répartir en tas. Pour les petits tas, ils reconnaissent immédiatement le nombre : deux, trois, quatre (au moins jusqu'à un nombre auquel ils ont affaire dans la vie quotidienne, comme les six membres de la famille avec les six assiettes, les six tasses sur la table, les six ...).

Lors du comptage de tas de marrons plus importants, le mouvement se manifeste dans le fait de les pointer un à un. Le mouvement se termine par le marron que nous comptons en dernier ! Les éléments que nous comptons, auxquels les nombres sont superposés, sont maintenant indépendants du déplacement dans l'espace et dans le temps. C'est une manière « terrestre » de compter ; il doit y avoir de la matière, visible, tangible, éventuellement audible. *On compte chaque fois que le mouvement s'arrête !*

Dans une perspective plus large, on peut affirmer que là où chaque mouvement se termine (on peut penser aussi aux processus de croissance), une forme solide, matérielle, apparaît, à laquelle un nombre (de la suite des nombres) est immédiatement connecté.

Si le calcul est construit seulement à partir de ce type de comptage, vous risquez d'être uniquement engagé dans une démultiplication matérielle, ce qui pourrait provoquer une attitude matérialiste dans l'âme de l'enfant.

Pourtant, il est nécessaire de bien exercer ce comptage, car il aide les enfants à connaître le monde dans lequel ils vivent comme des réalités observables et à les fixer afin de les maîtriser.

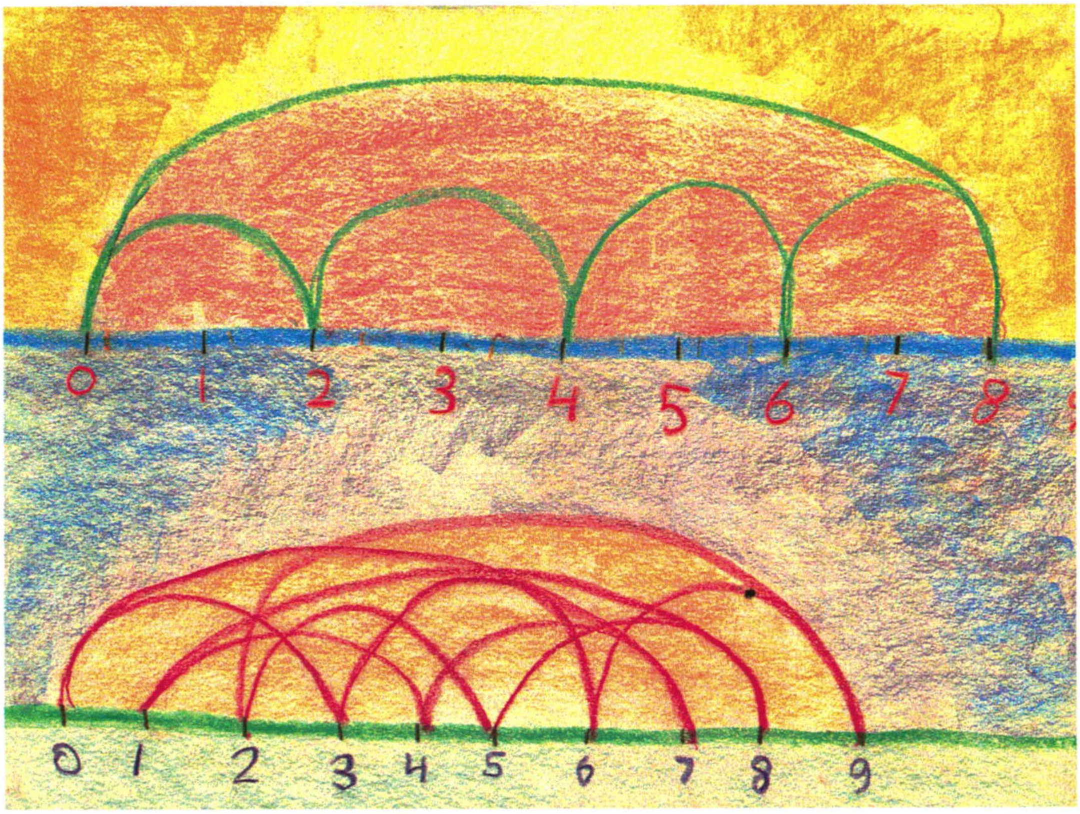
Pouvoir faire cela est tout aussi nécessaire que les os des membres sont nécessaire au mouvement. Les muscles sont des médiateurs de mouvement, mais sans os, l'homme ne peut se mettre debout et marcher.

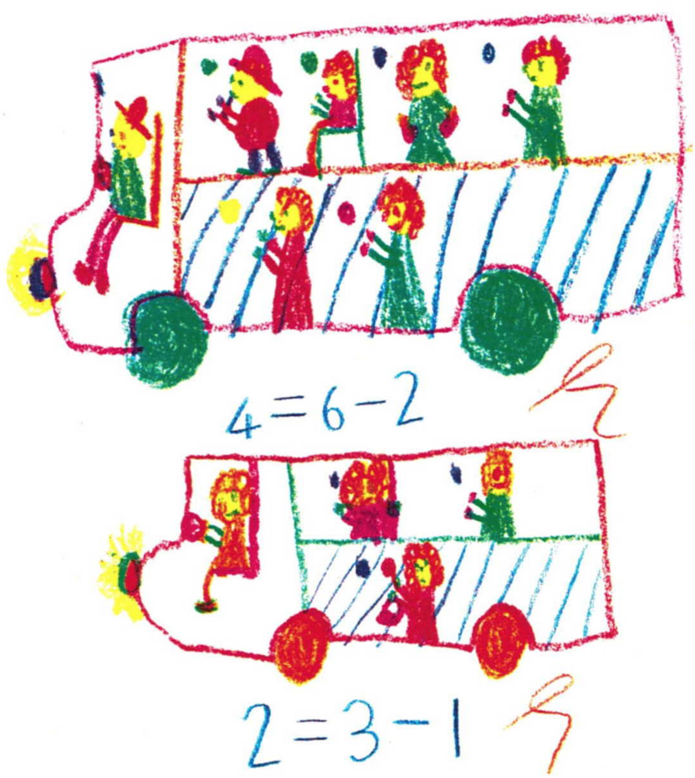
Grâce à l'enseignement par le mouvement, les enfants prennent conscience des trois « mondes des nombres » (les noms des nombres, les nombres–mesures et les nombres–quantités). Ils l'expérimentent dans le corps et l'âme, et non dans une pensée autonome dans la tête, qui doit encore se développer en tant qu'organe de la conscience. Il est important que l'univers des nombres forme un tout pour les enfants et il n'est pas utile d'amener déjà les différences mentionnées dans la conscience des enfants.

Il est cependant de la plus haute importance pour l'enseignant de bien réaliser ce qu'il enseigne aux enfants lorsqu'il conçoit du matériel pédagogique, des jeux et des exercices. Il s'agit, à partir d'une image (histoire) et au travers d'un mouvement dirigé, de susciter le comptage.

Un bel exemple de cela est la manière dont Rudolf Steiner s'est adressé aux enfants lors d'une visite à une classe : « C'est maintenant l'été et les roses fleurissent à l'extérieur. Qu'est-ce que ce

4. En qui concerne la différence entre les différents types de nombres, voir les commentaires en fin de la chapitre à la page 42 (NdT).


0 1 2 3 4 5 6 7 8
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9


4=6−2
2=3−1

serait bien si quelqu'un entrait maintenant et nous apportait un panier de roses. Chacun d'entre vous en en recevrait le même nombre. Regarde, toi, tu en reçois les trois premières ! » dit-il à une fille en les lui envoyant d'un geste. « Mais vous devez être habile et les attraper vraiment ! Alors nous verrons en même temps combien de roses il y avait dans le panier. » Ensuite, le deuxième enfant reçoit ses trois roses qui lui sont envoyées, et lorsqu'il les « réceptionne », il dit : « six ». Puis le troisième : « neuf » ; après quoi, il va de plus en plus vite : 12, 15, 18, 21, 24, 27, jusqu'à ce que le panier soit vide. La classe applaudit, mais il y a aussi eu des protestations, car les vingt autres voulaient aussi leurs roses. Alors, on a tout recommencé.

Ainsi a-t-il exercé la table de trois par un mouvement qui s'adressait à tout le corps. Les mains et les pieds étaient au moins aussi mobiles que la tête. C'était aussi magnifique de voir le rythme du mouvement du lancer et du rattraper qui formait en même temps un lien entre professeur et élève.

Ici, il s'agit de la dernière forme de comptage mentionnée (quantités), même sous une forme abrégée (on compte par trois), sans pourtant que n'apparaisse un élément matériel.

Il s'agit d'autre chose dans le cas du « saut des sept », où les nombres sont des nombre de pas, c'est-à-dire des *nombres-mesures* en mouvement, qui donnent une mesure pour chaque enfant lorsque le mouvement s'arrête. Du fait qu'un geste est ajouté à chaque nombre, le « qualitatif » est également impliqué.

« Qui sait encore ce que nous faisions pour six?"

« Six pas. »

« Avec les coudes au sol ! »

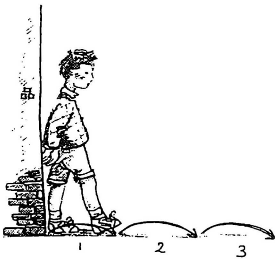
Compter des pas et les jeux musicaux où l'on compte des mesures appartiennent au comptage en mouvement avec des nombres-mesures. Les mouvements deviennent ainsi mesure de longueur ou durée. Les exercices avec des suites rythmées de nombres sont au service de différents types de comptage. Comme dans l'exemple de « l'agriculteur avec un sabot et une chaussette ». Il s'agit de compter les pas : doux-fort, doux-fort, ... qui devient 1 - **2**, 1 - **2**, ... ou 1 - **2**, 3 - **4**, 5 - **6**, ...
Au travers de variations du rythme, les enfants font l'expérience des structures que l'on trouve dans la suite de nombres. Le comptage abrégé, tel que 2, 4, 6, 8, ..., jette les bases des tables de multiplication. Dans le cahier de période, les enfants le dessinent avec des sauts au dessus de la droite des nombres.

En faisant également des exercices de comptage rythmique à l'envers, les enfants n'apprennent pas seulement à compter en arrière pour mieux savoir que le 4 est avant le 5. Il s'agit ici directement d'une activité pédagogique ayant un effet de renforcement du corps éthérique de l'enfant. Rudolf Steiner indique cela car, lorsque le corps éthérique est faible, des tensions nerveuses peuvent entraver les processus d'apprentissage. L'enfant ne peut alors pas assimiler correctement les expériences à partir desquelles il apprend.
La question ici est de savoir si cela doit être un objectif d'apprentissage en soi (on peut penser aussi à l'alphabet). L'objectif ici, n'est-il pas simplement l'activité ?

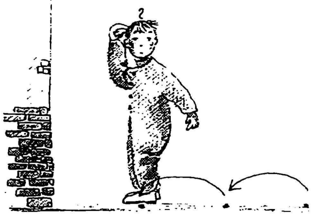
Enfin, les jeux dans lesquels on compte en avant et en arrière et où l'on avance et on recule, stimulent la réflexion, ou devraient le faire.

Le professeur place tous les enfants dans la cour de récréation, le dos contre le mur[5]*. Ils vont compter en marchant jusqu'à dix. Puis à l'envers, à partir de dix. Les enfants n'y comprennent rien (et le professeur ?) : ils ont bien compté, mais ils ne sont pourtant pas revenus au mur?*

À l'aller, les enfants comptent pendant mouvement (depuis le début jusqu'à la fin du pas).



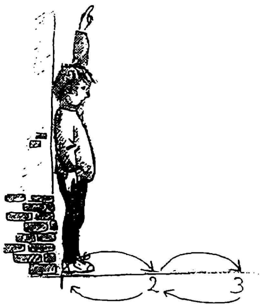
Sur le chemin du retour par contre, ce sont les moments d'arrêt (!) qui ont été comptés :



Il fallait quand même bien commencer là où on s'est arrêté à l'aller ?

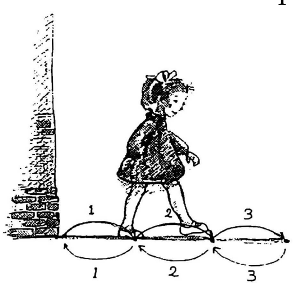
Pour l'aller, ce sont des *nombres-mesures* et dans la même activité, au retour ce n'est plus le cas : ce sont simplement des nombres avec lesquels on compte. Cela ne va pas ensemble !

Vous pouvez éviter ce problème en choisissant (souvent intuitivement) la forme de comptage appropriée. Par exemple, faites faire un saut aux enfants sur place à chaque pas et faites dire le nombre au moment du saut, alors le point de départ fait partie du comptage[6] !



3 nombres, mais 2 déplacements !

Ou bien vous ne comptez que les déplacements (1-2-3-3-2-1) :



3 nombres, entre 4 positions !

Dans les exercices de comptage (on peut penser aussi à l'apprentissage des tables) où une expres-

5. Sur la position de départ, voir le commentaire en fin de chapitre, page 42 (NdT).

6. Pour que cela fonctionne, il faut bien voir que ce ne sont pas les pas que l'on compte et qu'après avoir compté le dernier nombre, 3 sur le dessin, il ne faut plus faire de pas en avant. Voir le commentaire en fin de chapitre page 43 (NdT).

sion comme « retourner au point de départ » est nécessaire, les deux types de comptage peuvent donc être mélangés et utilisés alors de manière inappropriée. Qui veut « rentrer à la maison » doit bouger et compter ses mouvements ! Dans la période d'algèbre de la septième classe, les enfants traversent le zéro, en passant par « le point de départ » pour aller vers les nombres négatifs.

Enfin, une remarque avec un premier aperçu du travail écrit après avoir compté. Les enfants peuvent mettre les nombres en image du point de vue qualitatif dans un dessin. On peut également dessiner des éléments – tels que les marrons – après les avoir comptés. On peut représenter sur papier des sacs avec un certain nombre de pierres à partir d'une histoire. On peut encore imprimer les pas que l'on a faits sur un long rouleau de papier journal.
Il est frappant que l'on ne puisse pas enregistrer le mouvement qui mène aux *nombres-mesures*, car cela se déroule entièrement dans le mouvement. En fait, nous ne pourrons « écrire » cette manière de compter que dans la période sur la mesure en quatrième classe, lorsque les enfants comptabilisent des mouvements à longueur de journée avec des parties du corps, le pouce, le pied, la coudée..., mouvements qui deviennent distances entre un point de départ et un point d'arrivée. Parce que ce n'est qu'après avoir expérimenté ces unités que nous pouvons réellement déterminer des nombres-mesures (horloge, règle).

Dans le monde des adultes, nous connaissons la flèche[7] comme une possibilité de dessiner ce que nous mesurons, mais sur le papier il n'y pourtant pas plus de mouvement pour  que pour .

Et c'est ainsi que l'aiguille d'une montre bouge aussi et qu'après une heure, il est 1 heure.

Le comptage quantitatif possède aussi de la qualité!

Trois formes d'un problème didactique bien connu

1. *« Le premier janvier 1900, un nouveau siècle commence par ordre de l'empereur. »*
   Parmi les innombrables ordres et ordonnances émis par l'empereur allemand à l'automne 1899, il en est un qui suscita à tout le moins l'étonnement : son Altesse Impériale a décidé une fois pour toutes que le xxe siècle débuterait le 1er janvier 1900.
   Pour ses sujets, ce décret mit un terme à une discussion qui se déroulait dans une grande partie de l'Europe depuis un certain temps. Tout le monde n'était pas convaincu que le nouveau siècle allait effectivement commencer ce jour-là. Encore le premier janvier, un journal néerlandais a publié un courrier d'un lecteur de La Haye qui affirmait que le dix-neuvième siècle ne serait pas terminé avant le 31 décembre 1900 à minuit. Ce ne serait qu'à ce moment-là que 1900 années complètes seraient écoulées depuis qu'on l'on a commencé à compter les années : le vingtième siècle n'entrerait donc en vigueur que le 1er janvier 1901[8].
2. *Des points ou des pommes ?*
   Travailler avec des points ou des losanges est plus abstrait que de travailler avec des objets, comme en témoigne le fait que les enfants hésitent à propos du début et de la fin. Prenons par exemple cette ligne, où les points remplacent les nombres consécutifs :

7. Ceci se retrouvera aussi plus tard, souvent en 11e classe, lorsque les élèves aborderont les vecteurs et où des coordonnées pourrons désigner un mouvement (vecteur) ou une position (point). Sur chaque axe de coordonnées, ces deux aspects seront présents (NdT).
8. Source : *Documentaire 20e eeuw. Kroniek en aanzien van onze tijd. Waanders Uitgevers, Zwolle 1992*

On peut utiliser une telle ligne pour les enfants comme support pour les calculs $14+3$, $14+8$, $24-2$, $24-6$ et ainsi de suite.

Supposons qu'un enfant ne sache plus avec certitude combien font $14+8$ et veut le compter en s'aidant d'une telle ligne. Il ne faut pas qu'il commence à compter à 14, mais au point suivant. Par contre, s'il veut enlever 8 de 24, il doit commencer à 24 et non pas au point suivant. Le nombre à partir duquel on part ne compte pas pour l'*addition*, alors que, pour la *soustraction*, il compte. Si l'enseignant n'a pas pensé à cela à l'avance, il provoquera de la confusion et les élèves s'embrouilleront tellement que l'aide deviendra un obstacle.

Avec des choses concrètes, par exemple des pommes, la difficulté disparaît d'elle-même et aucun enfant ne se trompera. C'est pourquoi il faut par exemple commencer par dessiner des pommes autour des points et des nombres. Au début, les enfants peuvent aussi les dessiner, plus tard ils peuvent encore y penser, et finalement, on n'en parle plus [9].

3. *Wilfried*

   Wilfried est en première classe et appartient à ce qu'on appelle des « compteurs ». Tous les calculs, il les fait en comptant. Pour calculer 7 + 5, il commence à 7 et compte 5 en plus. Manda, sa camarade de classe, fait cela de manière encore plus primitive. Elle commence toujours à compter à nouveau. Pour $7+5$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, puis 5 de plus. L'enseignant est confronté à une question brûlante : comment se fait-il que Manda commette moins d'erreurs que Wilfried ?

La ligne des nombres

Après avoir vraiment bien bougé durant le cours de calcul, les enfants retournent à leur place. Ils y dessinent ce qui a été fait ou s'entraînent à compter, par exemple, des marrons ou des cailloux. Dans l'exemple de Marieke au début de cette section (voir page 7), nous avons vu que pour compter les objets, pour elle c'était des pierres, elle éprouvait le besoin de bien les disposer avant de commencer à compter. Elle rangeait donc tout d'abord soigneusement les pierres. Un autre enfant comptait toutes sortes de choses en désordre et balayait de la main ce qu'il avait compté. Pour ces deux enfants, ce fut tout aussi difficile de compter les plantes dans la salle de classe qui ne sont pas alignées sur le rebord de la fenêtre mais ici et là dans la salle de classe. Marieke ne pouvait pas les mettre en rang et l'autre enfant ne pouvait pas les enlever, mais il a découvert que c'était plus facile de compter les plantes qui étaient sur le rebord de la fenêtre que de compter le reste.

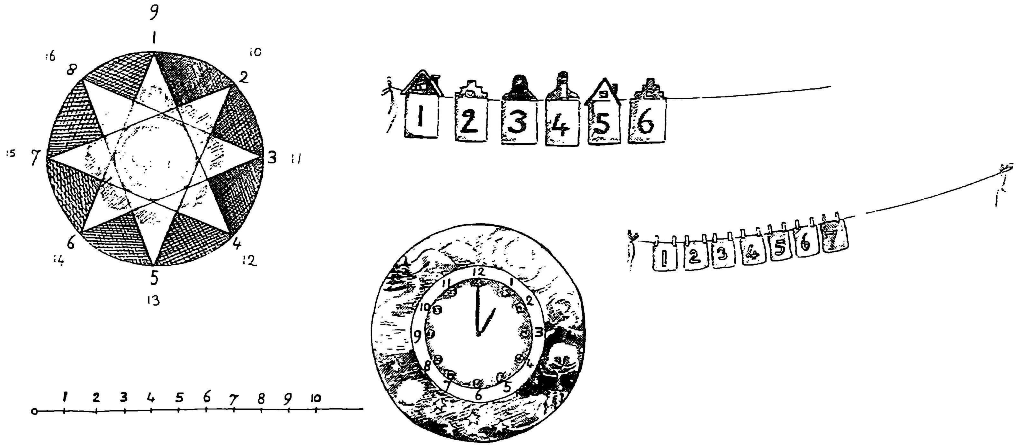
Dans les cahiers de période, nous voyons de beaux dessins d'une droite de nombres avec de grandes arches colorées qui indiquent le mouvement de la marche. C'est un modèle de ce que nous avons fait. Les enfants eux-mêmes savent qu'ils peuvent dessiner les suites de nombres rythmées, en mettant par exemple l'accent sur les nombres pairs avec de grands arcs. En deuxième classe aussi, on peut voir que cette représentation des tables convient bien aux enfants.

En dessinant ce que nous avons marché, les enfants eux-mêmes ont découvert qu'ils avaient des idées différentes sur la position du 1. C'est comme dans une course à pied. Nous avons remarqué ceci : comme on n'a pas encore marché quand on se trouve sur la position de départ, on ne peut pas y mettre 1. « Comment allons-nous appeler cet endroit où rien ne s'est encore passé ? », « Simplement 0 ! » C'était une évidence pour beaucoup d'enfants, ils n'ont soulevé aucun problème. Et c'est ainsi que la *ligne des nombres-mesures* est apparue dans le cahier de période.

9. Source : *C. Kellinga, Noodig Rekenen op de lagere school, Tilburg Adam, z.j.*

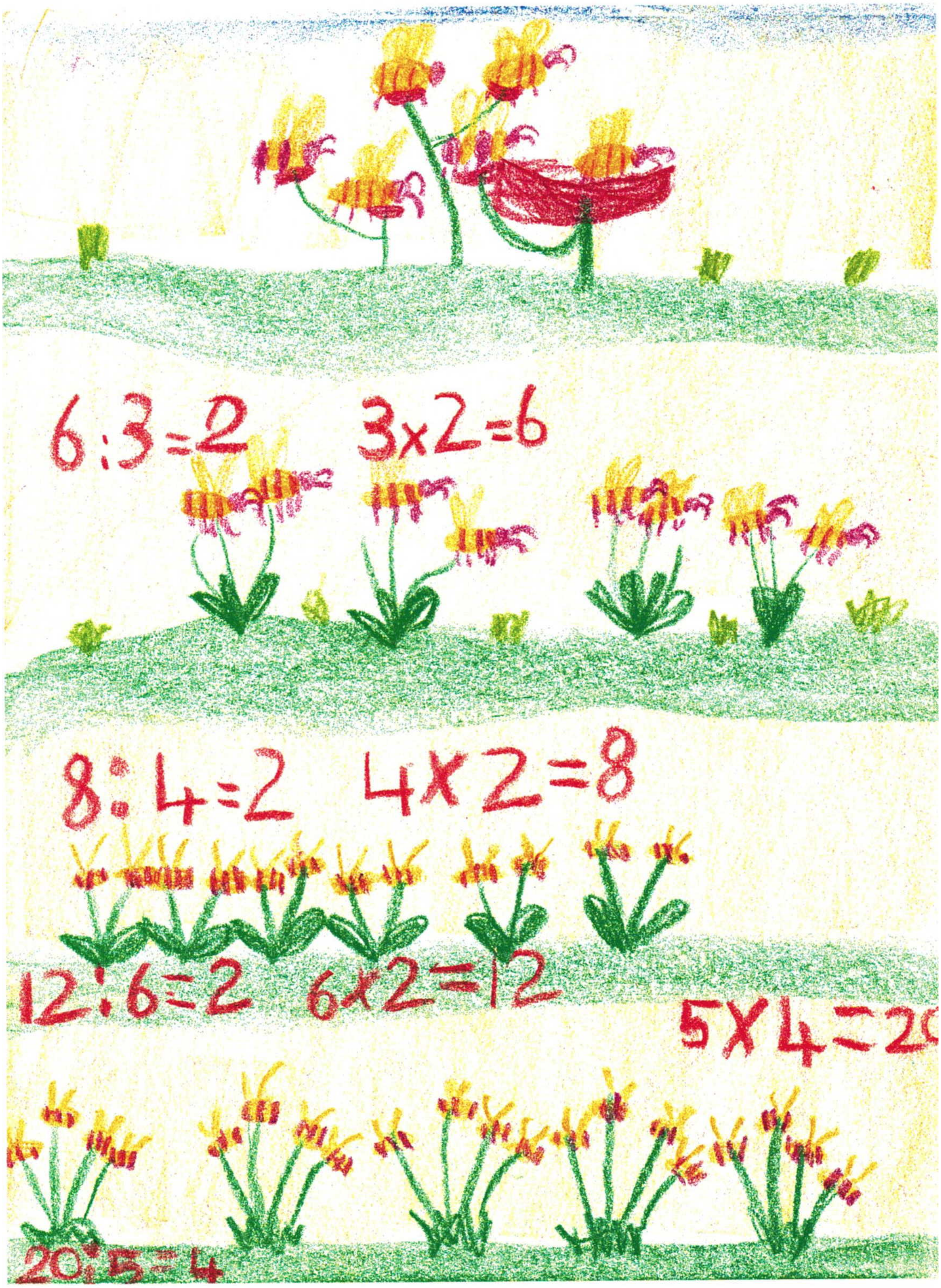
Le problème de la rangée de pierres de Marieke demeure. Lorsqu'elle met ces pierres sur un papier pour écrire les nombres, elle commence naturellement par 1, puis les nombres sont alignés : 1, 2, 3, 4, 5, 6, (7).

Une telle suite de nombres, on la trouve dans beaucoup de choses faites en classe, dans le cahier de calcul, au tableau, aussi dans les numéros des maisons, mais aussi dans la nature, dans le monde qui nous entoure. Là où les hommes veulent indiquer un certain nombre d'éléments en les numérotant, l'ordre et la quantité apparaissent clairement de manière immédiate.



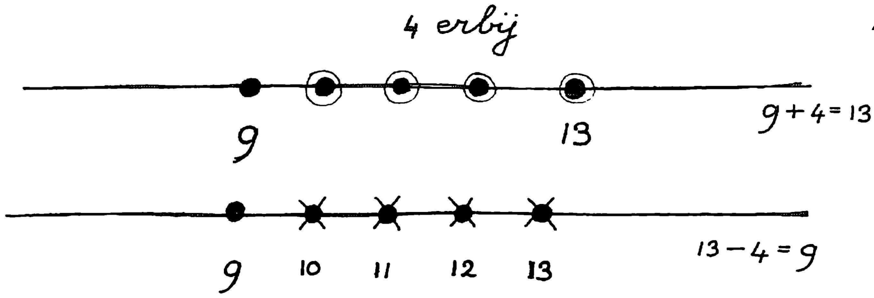
Et qu'en est-il de « la » ligne des nombres ? Est-ce une ligne avec des « points » ou est-ce une ligne avec des « intervalles » ? Une règle graduée est aussi une ligne de nombres, mais lorsqu'on l'utilise pour mesurer, on utilise les segments de droite entre les points plutôt que les points eux-mêmes. Le 1 appartient au premier centimètre, c'est-à-dire la partie de la règle allant de 0 à 1. Où commence-t-on à mesurer ? À 0 bien sûr. Les enfants se trompent souvent et commencent à mesurer au point 1. Ce malentendu survient parce qu'ils pensent à compter. Avec quel nombre commence-t-on à compter ? Avec 1 bien sûr.
Pourtant, on peut aussi concevoir la mesure comme un comptage : combien de morceaux d'un centimètre rentrent dans le grand côté du livre ?
Quand on mesure, on pense donc à une ligne des nombres composée d'intervalles. Les mesures, il est vrai, sont en réalité toujours des « approximations ». Tu mesures combien ? Je mesure 1 mètre 75. Environ, on le sait bien.
À l'école Waldorf, nous essayons de n'utiliser la ligne des nombres que quand elle correspond à quelque chose qui a déjà été fait. Ce n'est pas un modèle à partir duquel les quatre opérations peuvent être développées au début du calcul. Si les enfants ont des difficultés avec la suite des nombres au cours des premières années, nous préférons travailler avec des nombres qu'ils ont écrits par eux-mêmes sur des petites cartes. Ils peuvent les placer en ordre sur leur table en tant que support. Elles peuvent ainsi être utilisés pour des questions concrètes. Le fait que l'on puisse compter avec les *nombres-mesures*, cela apparaît lorsque nous sommes dans la cours de récréation et que nous faisons un jeu. Nous comptons des mouvements et, ensuite, nous pouvons poser ces cartes pour exprimer le nombre de pas ou d'un autre mouvement.

En 4e classe, la partie de la ligne des nombres entre le 0 et le 1 s'enrichit pour les enfants. Avec les fractions, la ligne des nombres se remplit de plus en plus. Durant cette phase du développement des enfants, donc après la neuvième année, les enfants peuvent également utiliser la ligne des nombres comme modèle pour le monde des nombres. C'est précisément dans le programme de quatrième classe que les nombres-mesures prennent leur sens et leur valeur pour les mesures.


6:3=2 3x2=6
8:4=2 4x2=8
12:6=2 6x2=12
5x4=20
20:5=4

Finalement, la ligne des nombres-mesures et la suite des nombres qui permet de compter ont maintenant la même « longueur » ! Que ce soit pour les nombres-quantités ou les nombres-mesures, les enfants peuvent désormais utiliser la même *ligne de nombres* comme *modèle*.

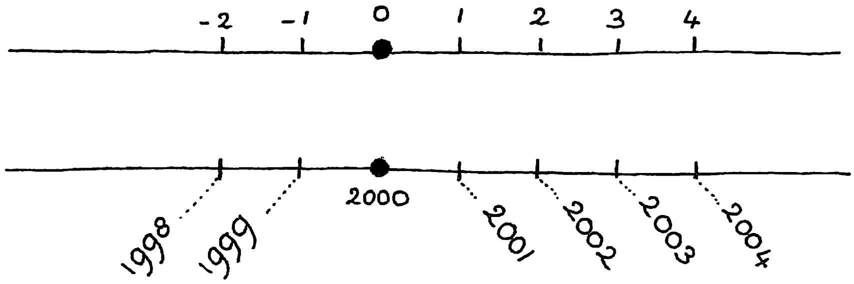
Revenons aux problèmes tels qu'ils ont été posés au début de cette section sur la ligne des nombres. Indiquer des quantités et des mesures avec des nombres purs sur une ligne de nombres reste compliqué !
La ligne des nombres de « Kellinga » a été apparemment pensée ainsi : une série de points (pour les pommes) placés dans une rangée. Si vous comptez cela à voix haute, puis ajoutez les noms des nombres, vous obtenez une ligne de nombres. Que signifie alors le point 5 ? Cela indique que l'on a déjà compté jusqu'à cinq. Ajouter, c'est placer de nouveaux points et les compter. Retirer, c'est barrer et regarder ce qui reste.



4 en plus

Quel fouillis !

— Qu'en est-il lorsque l'on pense par intervalles (c'est-dire par nombres-mesures) ?
— Qu'en est-il des pas pour apprendre à compter ? En d'autres termes : quelle image les enfants doivent-ils avoir pour harmoniser « compter des pas » et simplement « compter » ?
— Qu'en est-il du vingtième et unième siècle ? A-t-il commencé le 1er janvier 2000 ou le 31 décembre 2000 à minuit ?

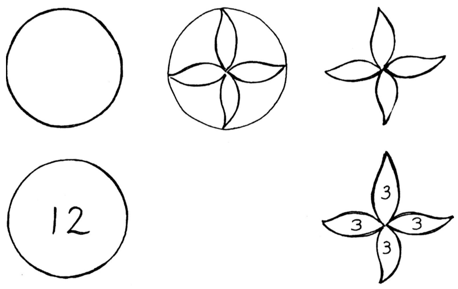


— Où est l'erreur dans cette idée ?

4 Les tempéraments

La connaissance des tempéraments est l'un des piliers les plus importants de la pédagogie Steiner-Waldorf. Dans le tempérament, tel que nous l'expérimentons en nous-mêmes, on trouve « le quatre archétypique » que nous retrouvons partout dans le monde : dans le déroulement des saisons, dans les quatre éléments, mais aussi, par exemple, dans les quatre opérations de l'arithmétique. En établissant la relation entre le tempérament et les opérations, on travaille à la formation de la personnalité de l'enfant, mais on le familiarise en même temps avec un principe arithmétique. Afin de pouvoir établir un lien avec ce qui est exprimé dans les tempéraments, il est utile d'apprendre à connaître le « geste » des tempéraments.

Le dessin de formes pour le tempérament flegmatique passe d'un cercle fermé et entier à un cercle interrompu.

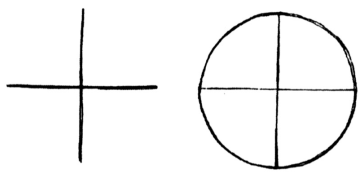


Addition

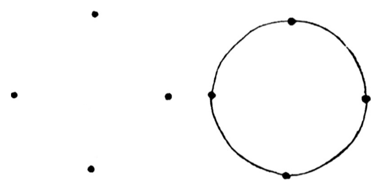
Lorsque nous regardons ce « geste » et que nous pensons à l'arithmétique, nous voyons que la forme va du tout aux parties.

Je fais venir des enfants (12) devant la classe. Ils s'alignent les uns à côté des autres. Maintenant, je fais appel à un enfant flegmatique. « Combien d'enfants se trouvent ici ? » L'enfant compte : « 12 ». Je dis : « Maintenant, amène ces douze enfants en groupes ou un par un à un autre endroit de la classe. » L'enfant commence à travailler. S'il amène les enfants un par un, il y a de fortes chances que vous ayez affaire à un enfant flegmatique. Lorsqu'il a terminé, je demande : « Qui as-tu emmené en premier ? Qui ensuite ? et ensuite ? » et ainsi de suite. Je laisse l'enfant réfléchir à ses propres actions. Souvent, il ne s'en souvient pas. Ensuite, on continue et ça commence à rentrer un peu plus dans les têtes. « Combien d'enfants y avait-il devant la classe ? » L'enfant : « Douze ». « Dans quels groupes les as-tu rangés ? » L'enfant : « Deux là, et trois là, et quatre là, et trois là. » Moi : « Oui, 12, c'est deux, et trois, et quatre, et trois. Dis-le aussi ». Je montre les groupes. L'enfant : « 12, c'est deux, et trois, et quatre, et trois. »

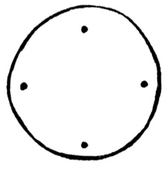
Après cela, un enfant colérique prendra son tour. Quel geste fait le dessin de la forme que Rudolf Steiner a donné pour le colérique ? Il s'agit de formes avec des pointes, des « aiguilles », qui doivent être transformées en formes fermées.



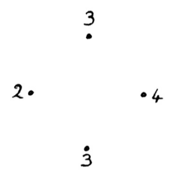
Si nous prenons ce dessin, il s'agit donc « d'enfermer ». Si on comprime les lignes en points, ça devient par exemple ceci :



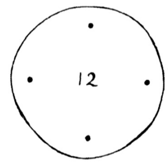
Si nous essayons de voir cela comme un geste, comme quelque chose qui bouge, alors la condensation peut continuer :



Nous allons des parties au tout. Ce dessin peut encore se condenser en



ou en



Lorsque nous regardons ce geste et que nous pensons à l'arithmétique, nous voyons que la forme va des parties au tout.

Les groupes que l'enfant flegmatique a placé sur le côté sont toujours là. Je m'adresse maintenant à un enfant colérique : « Tu as vu qu'il a emmené les enfants qui étaient alignés ici, là et là. Remets-les sur une ligne. » Il est toujours surprenant de voir comment le colérique veut partir en trombe ! Il est sûr d'y arriver. Et ensuite, la surprise est grande quand il entend : « Arrête, reviens ici. Tu les ramènes ici, mais de telle sorte que ceux qui ont été emmenés en dernier, soient maintenant ramenés en premier et ainsi de suite. » Et puis, ce que le colérique fait si mal : il pense, avant d'agir. Soudain, il dit littéralement : « Alors je dois réfléchir. »

Un moment magnifique. Il se passe quelque chose d'unique ici ! Les mots de Gezelle se réalisent ici : « Réfléchir avant d'agir » Et, entraînés par le colérique, les groupes reviennent un par un devant la classe. Trois, et quatre, et trois, et deux. Et il dit : « Trois, et quatre, et trois, et deux. »

Le flegmatique : du tout – la somme – aux parties. Le colérique : des parties au tout, et par là vient une inversion. L'inversion est, je pense, le plus essentiel. Cela ne semble guère important, mais c'est « le » moment pour le colérique : il doit réfléchir. Nous pouvons dire que par la façon dont l'enfant flegmatique et l'enfant colérique accomplissent la tâche, les autres camarades de classe apprennent à faire des additions ; les deux formes apparaissent dès le début : $10 = ... + ... + ...$ et $... + ... + ... = 10$

> Maintenant, il y a la question suivante : est-ce que tous les enfants font le dessin de la forme flegmatique, est-ce que nous le proposons à toute la classe ? Ma réponse est : non ! Les dessins de forme pour les tempéraments sont des exercices thérapeutiques. Ils sont spécifiques à ce tempérament. Si je veux aider le colérique à contrôler son besoin effréné de se manifester dans le monde, je ne dois pas lui donner un exercice qui favorise cette tendance : du tout aux parties (de soi au monde). Et le flegmatique que je voudrais précisément « amener dans le monde », je ne veux pas renforcer dans son âme la tendance à se refermer sur lui-même, en lui donnant un exercice allant des parties vers le tout, qui entraîne une concentration et une fermeture au monde encore plus grande.

Cela s'applique-t-il également aux exercices de calcul ?
Comme je l'ai montré dans cet exemple de cours avec la classe entière, je ne mets pas en jeu d'autres tempéraments que le flegmatique et le colérique. Même lorsque je travaille en classe avec des marrons ou quelque chose de similaire, j'encourage les enfants flegmatiques et colériques à faire « leur » propre mouvement. Tous les enfants participent donc, mais je mets l'accent sur la tâche à accomplir pour chaque tempérament.

Cela a déjà été expliqué ici : il faut travailler du tout vers les parties. Pour l'addition, cela signifie de nombreux devoirs du type : qu'est-ce que 10 ; 8 ; 11 et ainsi de suite.

Lorsque les calculs peuvent être effectués sans objets, c'est-à-dire mentalement, je commence progressivement à demander à tous les enfants de faire les deux calculs : $9 = ... + ... + ...$ et

... + ... + ... = 9 (ici, le colérique peut encore répondre à l'envers). Je passe alors lentement de l'addition de plus de deux termes à ... = ... + ..., pour terminer par la mémorisation d'une forme de table d'addition, par exemple :

$$\begin{aligned} 5 &= 4+1 \\ &= 3+2 \\ &= 2+3 \\ &= 1+4 \end{aligned}$$

Une nouvelle fois, je laisse à ce moment un peu plus de place à l'enfant flegmatique, et je fais répéter à l'enfant colérique, comme une sorte d'écho, $4+1=5$ et, lorsque cela marche, dans l'autre sens $1+4=5$, $2+3=5$ et ainsi de suite.
Pour finir, tous les enfants doivent apprendre à additionner.

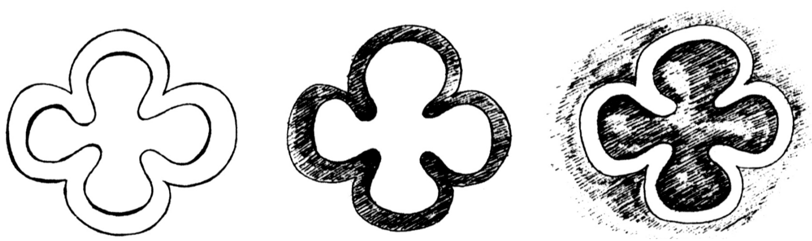
Multiplication

Pour la multiplication, on demande au sanguin de venir devant la classe. Regardons d'abord le dessin de formes qui lui convient. Il s'agit d'un motif libre et ce même motif repris plusieurs fois, collés les uns aux autres.

La répétition rythmique échappe à la conscience – elle acquiert un caractère de sentiment (= rêve). La répétition en pleine conscience cultive l'impulsion de la volonté [10]. S'arrêter et recommencer, voilà ce dont il s'agit si l'on veut donner au sanguin une plus grande concentration.

J'ai mis douze enfants devant la classe. J'appelle un enfant sanguin. Je le fais juste compter. « Douze. » « Bon. » Maintenant, je désigne trois enfants. « Tu vois ce groupe de trois ? Maintenant dis-moi combien il y de groupes de trois dans ces douze. »

Qu'est-ce que j'ai vu les enfants faire la plupart du temps ? Ils marchent le long de la rangée et créent un petit espace. Et puis encore ; et encore et encore. Ils trouvent : quatre fois.
Maintenant, c'est au tour de l'enfant mélancolique. Encore une fois, regardons le dessin de la forme pour le mélancolique. Il doit dessiner cette forme (a) :

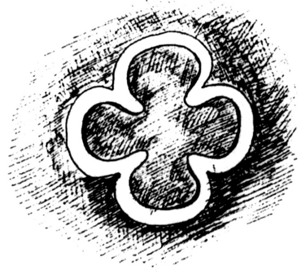


(a) (b)

Il doit alors dessiner la forme opposée. Rudolf Steiner : « Je vais hachurer la forme originelle comme ceci (a) et ensuite la forme opposée comme ceci (b). Ce qui est ombragé ici (a) doit être vide ici (b). Si vous imaginez le vide rempli, vous obtiendrez à nouveau cette forme (a). Ainsi, la forme extérieure (b) est l'opposé de la forme intérieure (a). Ici, vous avez le contraire des dessins avec des répétitions. Nous avons ici quelque chose d'une pensée, associée à quelque chose de vivant pour l'enfant mélancolique. »

10. Voir *La nature humaine*, quatrième conférence.

Il n'est pas immédiatement clair si l'enfant doit aussi hachurer ou colorier. Dans son explication, il parle des enseignants et non, comme c'est souvent le cas, des enfants. Sans les hachures, cependant, je ne peux pas saisir le sens des deux dessins. Sinon, ils sont identiques et je ne peux pas distinguer la forme opposée. Je ne peux donc pas m'empêcher de dire, lorsque l'enfant a dessiné la figure – d'abord sans hachurer – : « Regarde, je vais la rendre bleue (celle qui est hachurée). Ici, c'est blanc ». Je montre l'intérieur. « Maintenant, tu fais un dessin comme celui-ci, où la partie blanche est bleue et la partie bleue est blanche. » Je pense que je me conforme à la consigne : « Avec un enfant mélancolique, il serait bon de prendre quelque chose qui demande de la réflexion ». Que se passe-t-il alors ? L'enfant regarde, pense et dessine. L'intérieur est coloré en bleu. Et le mélancolique a terminé ! N'est-ce pas là l'essence même de la mélancolie : être concentré sur l'intérieur – le monde intérieur – son propre petit monde ? « Non », lui dis-je, « ce n'est pas encore fini. » Le regard du mélancolique est ramené vers le bord, vers l'extérieur. Il regarde, pense et ce qui semble si peu important est de la plus haute importance. C'est ce qui est ombragé au-delà de la forme, qui, selon moi, est le plus important.

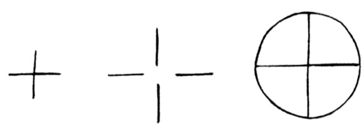


Le mélancolique n'a aucun problème avec « l'intérieur ». Pour le « dehors », il faut l'éveiller. Quelle invention grandiose de Rudolf Steiner ! L'intérieur s'oriente vers l'extérieur maintenant. Un changement de regard, l'attention envers soi-même se prolonge en une attention envers le monde extérieur. C'est ce que le mélancolique doit apprendre.

Les douze enfants que le sanguin a divisés en quatre groupes de trois sont toujours là. J'appelle l'enfant mélancolique et lui dis : « Tu dois regarder attentivement. Il y a quatre groupes de trois. Je veux que tu me dises combien de groupes de quatre tu peux faire avec eux ». Cela prend généralement un certain temps, mais j'entends ensuite : « trois ». En ce qui concerne la poursuite de la pratique en classe, je procède ici de la même manière que je le fais avec l'addition. L'enfant sanguin utilise les huit marrons pour faire quatre groupes de deux ; je demande l'enfant mélancolique de faire deux groupes de ... ? Tous les autres enfants font de même sur leur banc, mais ils n'ont pas à venir devant la classe. Plus tard, lorsque je poursuis ce type de questions oralement, j'essaie de faire en sorte que chaque enfant puisse donner la bonne réponse.

Division

C'est ce que l'enfant colérique doit faire. Le dessin de formes (voir page 18) nous montre le geste des parties vers le tout. Cette forme est, en quelque sorte, le geste de l'enfant colérique : s'affirmer dans toutes les directions. On peut y voir les coudes, les bras, voire les jambes, avec lesquels il se manifeste dans le monde. Si on va un peu plus loin, on dit : « Il est là ! Et là ! Et là ! »



Il s'agit maintenant de les placer dans un tout ou de les transformer en un tout, de les débarrasser de leurs arêtes vives. S'insérer dans l'ensemble, faire partie d'une totalité, être un membre constructif d'une communauté, c'est que nous pouvons voir dans le dessin de la forme du point de vue de la formation du caractère.

Je demande à un enfant colérique devant la classe. « Amène un groupe de trois enfants ici. » Il les fait sortir de la classe et ils sont là, devant le tableau. « Maintenant, je ne veux pas d'un groupe de trois ici, mais d'un groupe si grand qu'un groupe de trois pourra y entrer quatre fois. » (Si vous ne disiez rien après « si grand... », l'esprit colérique s'emballerait et suivrait son propre chemin). Non, ici encore la restriction : « qu'un groupe de trois pourra y entrer quatre fois ». Bien sûr, il va chercher les enfants dans toutes sortes de « coins et recoins » et les place avec pas mal d'agitation, mais quand même limitée, dans un ensemble : il y en avait précisément douze.

Bien sûr, vous pouvez dire qu'il s'agit à nouveau d'une multiplication. Mais si vous regardez le geste, vous ne le dites pas. On va de la partie au tout, tout comme le dessin de formes pour le tempérament colérique. Rudolf Steiner : « De cette façon, en faisant cela encore et encore, j'ai la possibilité d'utiliser les quatre opérations arithmétiques précisément pour l'éducation des tempéraments ». Si vous regardez à nouveau le dessin de formes pour les flegmatiques, vous verrez le geste : du tout aux parties. Pour le reste, le calcul est très simple. À partir de l'ensemble, trouvé par le colérique, il faut faire des groupes, il faut diviser.

Je dis alors : « Regardez, il y douze enfants ». Et j'ai laissé l'enfant flegmatique qui se trouvait devant la classe recompter s'il ne se souvenait pas ou ne connaissait pas encore « douze ». « Partage-les en groupes de trois et ramène-les à un endroit de la classe. » L'enfant flegmatique fait cela et doit ensuite savoir combien de groupes il a ramenés. (S'en souvient-il... ?)
Il dit alors : « Là, il y a un groupe, qui est un et, là, il y a deux et, là, il y a trois et, là, il y a quatre, en quatre groupes. » En fait, il est dit : $12 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$. *Plus tard, bien sûr, vous pourrez également demander combien de groupes de quatre peuvent être formés.*

Rudolf Steiner : « Vous découvrirez qu'il est très économique de faire les choses de cette manière et qu'il est également possible de les faire faire aux enfants de manière interchangeable. Après tout, la division est liée à la soustraction et la multiplication n'est en fait qu'une addition répétée. On peut donc aussi tout inverser et faire en sorte que l'enfant colérique, par exemple, soustraie ».
Ce qui précède montre à quel point Rudolf Steiner a envisagé le maniement de l'arithmétique de manière vivante. Après la première présentation selon le modèle fixe décrit, la présentation se poursuit de manière variée.

Soustraction

Tout d'abord, nous devons faire des soustractions avec l'enfant mélancolique.
Regardons pourquoi nous devons considérer le reste comme un tout. Rudolf Steiner en donne un exemple mathématique lorsqu'il décrit comment maman a envoyé Marie acheter des pommes. Marie a reçu vingt-cinq pommes, la vendeuse l'a écrit sur un papier. Marie rentre à la maison et n'a plus que dix pommes. Cela arrive dans la vie : Marie a reçu vingt-cinq pommes et elle n'en rapporte que dix à la maison. Marie est une Marie honnête, elle n'en a vraiment pas mangé sur le chemin du retour. Maintenant, quelqu'un arrive derrière elle qui est aussi honnête. Il ramène toutes les pommes que Marie a perdues en chemin. La question se pose alors : combien de personnes cette personne a-t-elle avec elle ? Vous la voyez arriver de loin, mais vous voulez savoir combien elle en apporte. Marie est arrivée avec dix pommes ; elle en a reçu vingt-cinq, vous

pouvez encore le lire sur la feuille de la vendeuse. Marie a donc perdu quinze pommes.

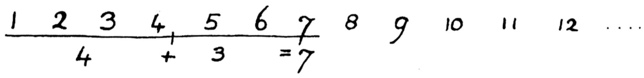
Il est instructif de voir comment Steiner travaille. Une image simple, un exemple – mais tiré de la vie ! – comme tremplin vers un problème de mathématiques. Que Marie soit une fille mélancolique, on peut le comprendre. C'est triste de perdre quelque chose. Cependant, on attire son attention sur le monde extérieur : où sont passées ces pommes ? Le tempérament sanguin doit faire le contraire. Cet enfant aime ramasser toutes ces pommes perdues, pour les chercher. Vous demandez à l'enfant mélancolique : « Il te reste dix pommes. Tu en avais vingt-cinq. Combien en as-tu perdues ? » L'accent est mis au début sur le *reste*, les dix pommes qui restent. En revanche, vous vous tournez vers l'enfant sanguin avec : « Écoute, si je prends quinze pommes sur vingt-cinq, combien en reste-t-il ? »
Le dessin de formes pour l'enfant mélancolique montre quelque chose de l'intérieur et de l'extérieur. Il est difficile d'indiquer précisément la relation avec l'arithmétique. Comme pour l'aspect arithmétique des autres tempéraments, aucune didactique toute faite ne peut être donnée : elle n'émerge qu'au fil des études et des expériences pratiques !

5 Les quatre opérations

Nous avons décrit ci-dessus comment le fait d'apprendre à compter à partir du mouvement et une première connaissance des nombres précèdent la découverte des quatre opérations. En partant des quatre tempéraments en tant que « gestes primordiaux » pour agir dans le monde, l'addition, la multiplication, la division et la soustraction ont été développés à partir des actions des enfants. Bien qu'il soit de plus en plus difficile, en raison d'influences culturelles, d'observer le tempérament dans le comportement des enfants, on s'adresse à eux au travers de manières d'agir qui sont colorées par leur tempérament. Chaque opération a été développée à la fois à partir de l'analyse et de la synthèse. Ces deux gestes arithmétiques polaires ont été ainsi exprimés au travers de tempéraments polaires. Lorsqu'en suite, tous les enfants effectueront ces opérations dans des exercices, ils pourront vivre les quatre opérations à partir des quatre tempéraments.

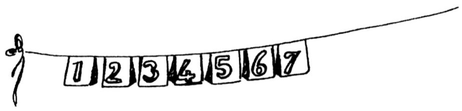
Les signes d'opération

C'est une (bonne) habitude de faire attention au début du calcul à l'introduction des signes d'opération. Après tout, ce sont des symboles qui n'ont tout d'abord aucune signification pour les enfants. Au début, les enfants ne connaissaient pas ces signes et nous parlons encore de « faire », de « continuer », de « combien plus ou moins », de « d'enlever ou retirer », de « combien de fois » ou de « partager entre » ou « combien de ... dans », et ainsi de suite. La situation ou le contexte donne le « geste » de l'opération. Lorsqu'ils le pratiquent avec des objets, des marrons, des cailloux, des haricots, des noisettes... les enfants apprennent les actions adaptées aux opérations.
Ce calcul est encore proche du comptage. Von Baravalle montre comment on peut rendre visible l'addition à partir du comptage. Cela va comme ceci. On souligne en dessous la rangée de nombres ce qui est compté :

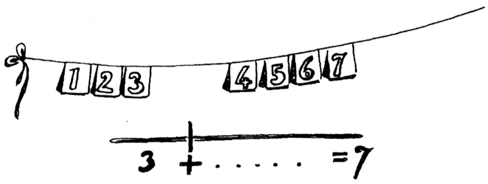


Un « parcours » de la main, après lequel ce mouvement le long des symboles indiquant les nombres (chiffres) est interrompu par un geste vertical – un signe de coupure – et repris ensuite jusqu'au dernier nombre ; puis un autre geste, à savoir le soulignement de cet ensemble. Il est à noter que cela crée également le signe plus. Dans ce mouvement, nous voyons le précurseur de ce qui deviendra plus tard la ligne des nombres. La place des nombres sur la ligne des nombres et les estimations des résultats acquièrent ainsi une dimension particulière (on pourrait dire motrice) [11].

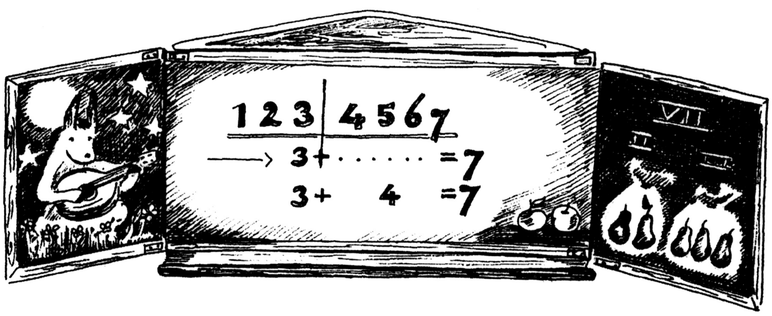
À l'avant de la classe, j'ai accroché les symboles des nombres sur une corde à linge pour que nous puissions les déplacer d'avant en arrière.



Je n'ai pas mis les chiffres après le 7 et je fais un espace entre le 3 et le 4. Je demande maintenant aux enfants : « combien devez-vous ajouter à 3 pour obtenir 7 [12] ? »



On le dessine encore d'une autre manière au tableau :



La relation entre les différentes opérations doit devenir claire dans le « faire ». Par exemple, lorsque l'on voit que $7 = 9 - 2$ et $9 = 7 + 2$ avec des marrons ; ou lorsque $3 \times 2 = 2 + 2 + 2$ a été observé en déposant des glands trois fois successivement et que l'égalité devient visible. Les propriétés d'une opération peuvent également être découvertes, par exemple la propriété de commutativité : $2 + 3 = 3 + 2$ ou $2 \times 3 = 3 \times 2$. Ceci peut se faire lorsque cela reste intégré dans l'ensemble d'une opération réalisée concrètement et que cela devient visible, par exemple, au travers d'un motif. Les enfants travaillent avec ces propriétés comme si de rien n'était. À partir d'une connaissance inconsciente, ils les appliquent simplement lorsque cela leur convient. Dans la plupart des cas, un apprentissage n'est pas nécessaire ici et on n'insiste pas encore sur ces aspects.

Les opérations arithmétiques, qui sont écrites au moyen de symboles, ont d'abord pris sens pour les enfants « de l'intérieur », principalement par le mouvement. Il est donc naturel d'associer les signes d'opération à ce mouvement. Ci-dessus, on en a un exemple avec la démarche de Von

11. Commentaire du traducteur. J'ai certaines réticences à la manière dont les choses sont présentées ici. Voir les commentaires à la page 43.

12. Commentaire du traducteur. Le texte original est : « Combien devez-vous ajouter à 3 (nombres) pour obtenir 7 (nombres). » Il me semble qu'une formulation comme la suivante prêterait moins à confusion : « combien d'étiquettes devez-vous ajouter aux 3 premières pour en obtenir 7 ? »

Baravalle pour l'addition. On peut aussi procéder différemment, notamment du point de vue du calcul en lien avec le tempérament. Dans ce cas, le geste, le mouvement de l'opération est relié aux images par une histoire. Il en ressort quatre dessins qui illustrent l'opération.

L'enseignant dit : « Les enfants, vous connaissez les glands, les faînes, les graines et tout ce que les animaux aiment manger dans la forêt. Mais il y a beaucoup de choses qui restent sous les feuilles et les pierres ou dans l'herbe. J'ai entendu dire qu'il y a des gnomes qui s'assurent que tout ce qui est caché arrive aux animaux. Il y a des gnomes spéciaux qui collectionnent tout. Ils portent avec eux des paniers qu'ils chargent de ce qu'ils trouvent pour les animaux (...). »
« Venez vous placer dans le cercle. Faisons comme si nous étions les gnomes. Il y a quelque chose ici, et quelque chose là aussi. Prenez-le et mettez-le dans votre panier. »
Les enfants marchent en cercle et chaque fois qu'ils « ramassent » quelque chose, ils le mettent dans leur « panier ».
« Avez-vous observé comment les gnomes marchent ? »
Au cours d'une petite conversation avec les enfants, il s'avère que ces gnomes doivent faire attention, qu'ils marchent calmement et que leur panier est de plus en plus rempli de sorte qu'ils ne peuvent plus marcher rapidement. Et les enfants reprennent leur marche sur les paroles du poème suivant, remplissant tour à tour leur panier à gauche et à droite.

Cherchons, cherchons, à gauche et à droite,
Ramassons un peu ici, ramassons un peu là,
Les animaux restent paisibles,
Car nous sommes des gnomes,
Qui dans des paniers pleins et lourds,
L'un après l'autre, tous les jours,
Travaillons tranquillement portant ensemble,
Ce que nous trouvons ici et là.

Le lendemain, les enfants font un dessin des gnomes ventrus, qui se promènent dans la forêt avec leurs paniers.

De cette façon, le caractère de l'addition peut être très bien dépeint. Il éveille chez les enfants un sentiment pour l'essence de l'addition, pour la nature flegmatique de la collecte. Cela peut également être souligné dans le poème.
Dans cette approche des quatre opérations, les particularités des différents gnomes, qui sont occupés dans la forêt, sont d'une importance cruciale.
Le *collectionneur* aux joues rouges collectionne tout ce qui a poussé en été et mûri en automne.
Le *gnome maigre* distribue tout ce qui a été ramassé pa le collectionneur jusqu'à ce qu'il ne lui reste plus rien et qu'il puisse dire mélancoliquement : « Maintenant, il ne me reste plus rien ».
Le *sauteur* danse à travers la forêt et s'assure partout que les fleurs apparaissent sur les arbres pour qu'ensuite les plantes puissent sonner plusieurs graines à partir d'une seule petite graine.
Et enfin, le *gnome robuste* divise tout ce qui est trop grand et trop haut pour que chacun ait sa part.

Sur le papier, ils pourraient ressembler à ceci :

Il y a donc quatre gnomes calculateurs à partir desquels les signes d'opération peuvent être introduits.

Les signes d'opération abstraits sont ajoutés aux dessins de gnomes ; ils apportent les signes avec eux, pour ainsi dire. Ils peuvent ensuite être utilisés pour dessiner ce qui a été fait et, plus tard, pour écrire les opérations avec des symboles.

On comprendra qu'il s'agit là d'une manière complètement différente d'introduire les signes du calcul dans le monde de l'enfant, que celle indiquée ci-dessus pour le comptage [13]. Les deux voies, celle du comptage mobile et celle des nains calculateurs « imaginés », ne doivent pas se gêner l'une l'autre, car il est tout à fait concevable que les nains calculateurs travaillent avec la ligne des nombres (en cire) !

> Il est dommage que les signes mathématiques eux-mêmes ne représentent pas très bien l'opération (le signe $\times$ par exemple, la multiplication). Quand je pense à la multiplication, je pense plutôt à un certain nombre de groupes égaux, ou à un quadrillage rectangulaire plutôt qu'à un gnome sautant d'une quantité à une autre. Peut-être qu'un jour un arithméticien créatif se lèvera dans l'école libre et proposera une introduction plus significative aux signes des opérations [14].

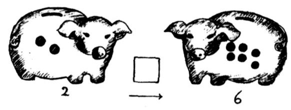
Le langage des flèches

Ce peut être un bon moment pour introduire le langage des flèches comme transition vers la notation de « vraies » opérations (mieux : l'inventer avec les enfants). Ici aussi, le point de départ

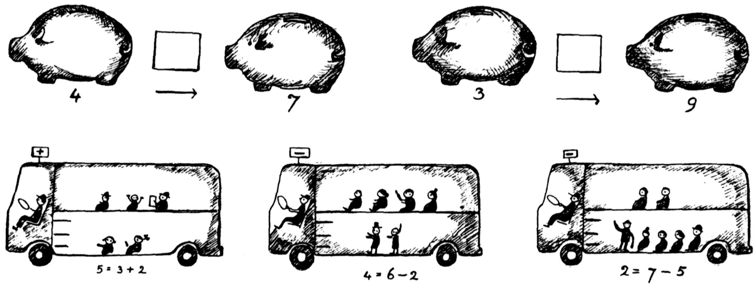
13. Voir le commentaire page 43.

14. Commentaire du traducteur. Je ne suis pas d'accord. Trouver une image appropriée, qui respecte l'esprit de l'opération, me paraît la meilleur façon de faire. L'image du rectangle est très utile en maths mais bien trop éloignée de la vie – et trop figée – pour l'utiliser pour introduire la multiplication et son symbole.

peut être de dessiner ce qui a été fait. Dans la tirelire de Léon, il y a deux euros, et depuis que Papy et Mamy sont venus, il y a en a six. Cela peut être dessiné :

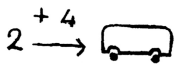


Ensuite, la notation peut également devenir plus schématique, et des exercices similaires peuvent être variées sur le thème de la tirelire :



On peut également utiliser une notation plus schématique lorsque les enfants sont capables d'exprimer ce qui s'est passé, par exemple : « Au début, nous étions deux. Plus tard, nous étions six. Il y en avait quatre en plus. » Ou encore : « Nous étions deux à parler, quatre nous ont rejoints. Puis nous avons été ... »

Avec le « langage » des flèches, d'une part, on fait un pas vers l'abstrait, et d'autre part, on peut encore voir quelque chose de la dynamique de l'acte arithmétique. Ce langage est plus proche de la réalité que ce qui est décrit par des symboles mathématiques. Dans la deuxième étape, « l'élement actif [15] » est placé au-dessus de la flèche. Dans une étape suivante, le signe de l'opération peut être ajouté.



De cette manière, la transition vers un langage formel avec des symboles mathématiques, dans lequel les *actions* arithmétiques ne sont souvent plus directement reconnaissables pour les enfants, se fait progressivement.

Comment poursuivre ?

Au cours de la première classe, les enfants comprennent de mieux en mieux les événements du monde qui les entoure. Nous nous en servons en mathématiques et racontons en classe une histoire sur un tel événement concret de la vie quotidienne. Les enfants reconnaissent immédiatement les « aspects calculatoires » dans les actions. Maintenant, lorsque les quatre opérations viennent du monde vers les enfants, ils les reconnaissent à partir de leur propre dynamique.

Dans une telle histoire avec du calcul, il y a des éléments qui jouent un rôle actif ou passif dans l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division.

Exemples

15. Voir le commentaire page 43

1. Esther a acheté sept pommes pour sa grand-mère. En chemin, elle a trébuché, et avec une grosse écorchure au genou, elle est arrivée chez sa grand-mère. Une fois sur place, elle a découvert que le sac de pommes était déchiré. Il restait quatre pommes pour sa grand-mère.

   Combien de pommes Esther a-t-elle perdues ? Elle pense : J'arrive chez grand-mère avec 4. Je suis sortie avec 7. Alors $4 = 7 - ...$?
2. C'est l'anniversaire de Jan et il a dessiné une belle invitation pour sa fête pour dix amis. Avec l'aide de sa sœur, les cartes ont été dessinées et il veut maintenant les mettre à la poste. Sa mère lui donne quatre timbres, puis il court chez son père pour demander d'autres timbres.

   Combien de timbres papa doit-il lui donner pour envoyer toutes les cartes ? Il pense : j'en ai besoin de 10. J'en ai déjà 4, donc $10 = 4 + ...$?

Pour ces premières histoire avec des calculs, il est important de choisir des situations dans lesquelles on peut partir de la totalité. Ensuite, l'enfant peut chercher l'événement qui mène à l'opération en question et résoudre le calcul dans l'histoire. L'enfant trouve ensuite le nombre qui a joué un rôle actif :

$4 = 7 - 3$, j'ai perdu 3 pommes.
$10 = 4 + 6$, je dois avoir 6 timbres de plus.

Il est à noter que les enfants sont souvent tellement absorbés par l'histoire qu'ils oublient de compter. Ceci est renforcé par le fait qu'il y a toujours une nouvelle histoire. Il est donc bon de varier les nombres dans la même histoire et de poser une question telle que : « Que se passerait-il si Esther était partie de chez elle avec 10 pommes ? » ou « Si Jan voulait inviter 12 amis ? ».

Lorsqu'on effectue des calculs avec des objets ou des histoires, on peut utiliser **les quatre questions principales** qui accompagnent les quatre opérations. Pour aider à reconnaître rapidement ces quatre questions clés, elles sont appliquées à des calculs « abstraits » dans l'exemple cidessous :

1. Que dois-je ajouter à 3 pour obtenir 5 ?

   $3 + ... = 5$ $\quad 3 + \mathbf{2} = 5$
2. Que dois-je soustraire de 9 pour obtenir 5 ?

   $9... = 5$ $\quad 9 - \mathbf{4} = 5$
3. Par quoi dois-je multiplier 4 pour obtenir 12 ?

   $... \times 4 = 12$ $\quad \mathbf{3} \times 4 = 12$
4. Par quoi dois-je diviser 10 pour obtenir 5 ?

   $10 : ... = 5$ $\quad 10 : \mathbf{2} = 5$

Dans ces exercices, deux nombres sont toujours donnés. L'enfant doit chercher activement, en vivant l'action intérieurement, le troisième nombre, appelé ici « actif », qui représente l'événement de l'opération.

Cela peut se faire à différents niveaux. Avec des *objets concrets* (trois pommes qui doivent devenir cinq...), avec des *représentations* d'objets concrets (je pense à des pommes et je prends trois cubes ou je dessine trois points...), *de manière schématique* (par exemple des points ou des nombres sur deux rangées ou sur une ligne numérique), *de manière symbolique*, purement avec des chiffres et peut-être enfin *de manière automatisée*, sans compter ni même y penser : $3 + 2 = 5$.

Lors de la création des exercices, les questions et la situation de l'histoire doivent toujours être mises en relation avec la phase de développement de l'enfant et avec sa relation au monde environnant. Les situations concrètes doivent « correspondre à la vie », pas irréalistes. L'enfant doit être capable de se mettre dans l'histoire. C'est ce que les didacticiens entendent par « calcul réaliste ».

Les différents sens, en tant qu'organes de perception, requièrent également une attention particulière. Dans les exercices d'arithmétique, les enfants « observent » également. Lorsque nous calculons avec des objets, il est évident que nous pouvons voir ou entendre et que nous pouvons aussi toucher quelque chose. Pensez maintenant à des exercices dans lesquelles nous ne faisons qu'écouter, regarder ou, comme dans les exemples ci-dessous, toucher.

Exemples

1. Tous les enfants ont les yeux fermés ou portent un bandeau. Sur leur table, il y a des pierres (ou quelque chose de similaire) dont certaines sont lisses et d'autres rugueuses. Elles sont recouvertes d'un tissu et les enfants doivent déterminer le nombre de pierres seulement par le toucher. Ensuite, le tissu est enlevé et ils déterminent les pierres de chaque sorte également par le toucher ! Ensuite, les enfants déterminent « par le toucher » le calcul de quelqu'un d'autre après avoir changé de place.
2. Tous les enfants cherchent dans la classe des objets dans lesquels on peut trouver un nombre. Ils prennent ces objets et les mettent sous un tissu sur leur table : le pot avec les pinceaux, la pile de planches à pain... Puis, deux par deux, ils vont à la cherche des nombres cachés et ils doivent à tour de rôle dire le nombre de l'objet caché de l'autre. Ensemble, ils forment alors une addition. Ou peut-être aussi d'autres calculs.

3. Toute la classe a les yeux fermés. Un enfant est choisi et, les yeux ouverts, met un tissu sur quelque chose dans la classe qui peut être divisé ! Par exemple, dix cartes du jeu de memory. Un deuxième enfant reçoit la tâche suivante : sentir ce qui se trouve sous le tissu. Peux-tu en faire une répartition ? Fais-le ! ($10 = 5 + 5$; $10 = 2 \times 5$; $10 = 3 \times 3 + 1$). Maintenant, tout le monde ouvre les yeux. Tous les enfants peuvent aller vers le calcul caché et, en fermant à nouveau les yeux, ils le recherchent par le toucher.

   Ils murmurent le calcul qu'ils ont trouvé à l'oreille de l'enseignant. Ne le dis à personne !

Il est intéressant de voir, lorsque tous les enfants sont passés par là [16], qui n'a besoin de compter qu'une seule fois pour trouver la calcul et qui doit le faire plusieurs fois.

Comment donner un peu de soutien aux calculateurs lents ? Il faut penser aux possibilités de représentation de la quantité invisible. (Regarde, sur le mur tu peux aussi voir 10 ...) et de une structuration (pense à tes 2 mains, 10 doigts, ...).

16. Commentaire du traducteur. Ces exercices, très intéressants, font appel au sens du toucher de manière active. On peut aussi le mettre en œuvre d'une autre manière en touchant l'enfant, soit à des endroits différents, soit avec des matières différentes. On peut aussi faire appel à l'ouïe avec différents type de sons, tant dans leur sonorité que dans leur durée ou leur rythme. Et pourquoi ne pas solliciter le goût ou l'odorat ?

Le terme « histoires de calcul » a pu suggérer, à tort, que cette arithmétique n'est proposée que verbalement, par le biais d'une histoire ou d'une description verbale d'une situation. N'oublions pas qu'il est important également de prêter attention à la perception visuelle. Une histoire sur l'arithmétique peut très bien être représentée par un beau dessin (une photographie ?!), même si elle concerne une situation quotidienne très ordinaire. Dans ce contexte, les images parlantes sont celles qui évoquent des expériences personnelles ou déclenchent l'imagination des enfants. Et, il y a toujours des occasions de se mettre à calculer et de discuter d'arithmétique.

Combien d'oeufs ma soeur a-t-elle utilisé pour faire cuire le gâteau ?

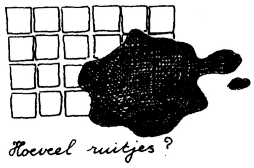
Du comptage au calcul

Nous voulons familiariser les enfants avec le calcul de sorte qu'avec le temps, compter ne sera plus nécessaire. Nous devons donc les aider à quitter le comptage au moyen d'exercices. Ceci est particulièrement nécessaire pour les élèves faibles en calcul. Tous les professeurs connaissent bien ces enfants qui se rabattent constamment sur le comptage et ne parviennent pas à appliquer et à mémoriser les tables d'addition.
Une étape avancée du processus de comptage est le comptage abrégé. Les quantités sont comptées à l'aide de groupes ou de structures qui apparaissent naturellement. Celui qui peut utiliser des astuces pour compter (par exemple compter les chaussures par paire ou les doigts par bonds de cinq) est sur la bonne voie. Cela va dans le bons sens pour ce « désapprentissage du comptage ». Le comptage par saut acquiert ainsi une signification didactique supplémentaire. On peut également faire apparaître des structures dans une histoire ; les quatre pieds des tables de la classe ou un motif de dalles dans la cour de l'école s'il y en a une (sinon, on peut aussi fabriquer son propre plateau dans la classe, à partir de dalles en carton ou d'un lot de dalles de moquette). Il y a des enfants qui ont tendance à continuer à compter et à voir les éléments séparés. Assurez-vous que dans l'histoire dessinée, par exemple, il y a aussi des boîtes d'œufs fermées (dix pièces), ce qui stimule le passage à la multiplication sans avoir à faire des additions ou même à simplement tout compter.

Le principe, qui consiste à additionner des quantités invisibles, peut être appliqué plus tôt, lors du comptage. Par exemple :

Il y en a trois dans la petite boîte.
Combien y en a-t-il au total ?

Ou bien pour la multiplication :



Combien y en a-t-il de carreaux ?

Progressivement, nous avons atteint le deuxième ou peut-être le troisième degré avec cette arithmétique. Les enfants reconnaissent de plus en plus les opérations dans des exercices divers, mais ils vont aussi essayer et explorer les possibilités des quatre opérations au sein d'un même exercice. Au bout d'un certain temps, ils peuvent également répondre à d'autres questions que les quatre opérations. Il existe également des situations de la vie quotidienne où l'on donne « l'élément actif » et où l'on demande le résultat de l'opération.
Margriet est partie avec 7 pommes et en a mangé 4 en chemin avec ses amis. Avec combien de pommes ... ? $7 - 4 = ...$

Nous allons maintenant examiner à nouveau diverses situations pour les exercices dans le cadre des quatre opérations. Les enfants résolvent souvent les problèmes comme une évidence. En tant qu'enseignant, vous devez toujours rester attentif à ce que vous demandez afin de pouvoir reconnaître les pistes de solution mal choisies par les enfants.

Tout d'abord, pour la *soustraction*

a) Les enfants peuvent identifier la différence. Pensez à l'exemple des pommes pour grand-mère.
b) Les enfants peuvent également calculer ce qu'il vous reste lorsque vous donnez quelque chose. Jules arrive à l'école avec 10 billes. Son ami Thomas a oublié ses billes. Jules en donne 4 à Thomas pour pouvoir participer quand même. Combien de billes reste-t-il à Jules ? $10 - 4 = ...$, une véritable soustraction.
c) Les enfants peuvent déterminer une différence même si une addition est suggérée : Matias a 5 pommes et Lorena en a 9. Combien de pommes de plus Lorena a-t-elle que Matias ?

Puis, pour *l'addition*

a) Les enfants doivent compléter pour atteindre un nombre donné. Florian avait 5 euros dans sa tirelire, combien doit-il économiser pour pouvoir acheter un couteau de poche de 12 euros ? $5 + ... = 12$

b) Les enfants peuvent ajouter des éléments successivement. Jules a quitté la maison avec 10 billes. Il a gagné 22 billes ce jour-là. Combien de billes a-t-il ramené à la maison ? $10 + 22 = 10 + 20 + 2 =$ ...

N.B. Dans ce contexte, les nombres 10 et 22 peuvent être tous deux actifs, mais au moment du calcul, l'enfant choisit un nombre de départ, qui devient donc passif.

Pour la *multiplication*

a) Les enfants peuvent chercher l'opérateur lorsque le produit est donné. Un garde forestier veut planter 12 arbres. Il peut en transporter 3 à la fois sur un chariot. Combien de fois doit-il conduire ? ... $\times 3 = 12$

b) Les enfants peuvent aussi multiplier lorsque l'opérateur est connu et s'ils savent ce qui va se passer. Un garde forestier peut transporter 3 arbres. Il conduit son chariot 4 fois. Combien d'arbres a-t-il transportés ? $4 \times 3 =$ ...

Enfin, à propos de la *division*

a) Les enfants peuvent diviser lorsqu'il y a une quantité à partager. Vous êtes cinq. J'ai ici 10 bonbons, répartissez-les équitablement entre vous. Que reçoit chacun ? 10 : 5 = ... La réponse est 2 bonbons, le nombre de bonbons que chacun reçoit est un nombre concret (un nombre d'objets).

b) Les enfants peuvent diviser à partir d'un nombre donné comme mesure. Diviser 10 bonbons en portions de 2 bonbons. Combien de portions de 2 bonbons pouvez-vous faire ? 10 : 2 = ... ? Mais 10 : ... = 2 est meilleur ! La réponse est 5 qui est un nombre « pur ».

> Dans ces deux approches du partage, je reconnais une discussion didactique de longue date sur la distinction entre division « partage » et division « contenance » ou un « rapport ». Ce dernier cas se présente lorsque, comme dans l'exemple ci-dessus, vous voulez savoir combien de fois vous pouvez obtenir deux bonbons dans un total de dix bonbons. C'est donc un *rapport* de 10 (bonbons) : 2 (bonbons). Dans le premier cas, il n'y a pas de rapport, vous voulez vraiment *partager* dix bonbons entre cinq enfants, c'est une division. Cette distinction ne s'est jamais vraiment avérée utile pour les enfants [17].

Entre-temps, nous avons avancé dans le temps, les enfants sont vraiment dans leur 3e classe et certains d'entre eux ont déjà fêté leur neuvième anniversaire.

Les enfants peuvent maintenant effectuer toutes sortes d'exercices, y compris des calculs dans des situations d'application – non pas « par cœur », mais avec leur corps ! Il était important que les enfants fassent d'abord leurs propres calculs, en bougeant et en faisant appel à leur tempérament. Par la suite, l'arithmétique a fait de plus en plus partie du monde, notamment parce que les exercices reflétaient des situations concrètes, basées sur des exemples du monde de l'enfant.

L'attitude naturelle de l'enfant est analytique, nous le laissons donc travailler de manière analytique en apportant une structure aux quantités, en reconnaissant la structure dans une rangée de nombres et entre les chiffres des nombres eux-mêmes. En passant du tout aux parties dans les quatre opérations et en recherchant le nombre « actif » dans le calcul, nous faisons appel à la volonté d'analyse. Dans le monde et la culture, les enfants sont aussi confrontés à la synthèse. Dans ce cas, un nouveau tout naît des parties. Par exemple : « Un étui à crayons coûte 4,00 euros. Que coûte une boîte de vingt-cinq étuis de ce type ? »

17. Voir commentaire page 44.

Il est logique de n'envisager ce type de questions qu'au stade final de l'apprentissage de toutes les structures au sein des quatre opérations, par exemple pendant l'activité du magasin en troisième année.

Nous avons maintenant atteint le point que Rudolf Steiner a indiqué comme étant le moment où l'arithmétique devient plus abstraite. Dans la deuxième moitié de la troisième classe, lorsque les enfants ont atteint un âge compris entre neuf et dix ans. Nous avons parcouru avec l'enfant un chemin *de l'intérieur vers l'extérieur* pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division, il peut reconnaître *les nombres eux-mêmes* dans les exercices comme des données concrètes. En raison des différences dans le développement et les capacités, ce qui reste abstrait pour un enfant peut être concret pour un autre.

Pour faire la transition vers cette arithmétique abstraite avec des nombres purs, nous pouvons faire appel à des nombres concrets ! On peut toujours penser à l'argent. Non seulement $2 \times 10 = 20$, mais deux pièces de 10 cents $= 2 \times 10$ cents $= 20$ cents.

Ou aux courses : trois douzaines de pots de confiture dans une boîte de l'épicerie. Trois douzaines de bocaux $= 3 \times 12$ bocaux $= 36$ bocaux.

Ou encore, deux paires de chaussures = quatre chaussures.

Les questions de durée sont également appropriée : Combien de jours font trois semaines ? Combien de quarts d'heure y a-t-il dans cinq heures ? L'horloge et le calendrier fournissent de magnifiques structures arithmétiques, qui pourront plus tard – en quatrième et cinquième années – servir de base concrète à des calculs arithmétiques avec des fractions (Combien de quarts dans cinq moitiés [18] ?

Lorsque nous avons effectué les calculs de cette manière, il n'est plus difficile pour les enfants de considérer le nombre 20 comme une donnée concrète dans un calcul tel que $3 \times 20 = 60$, même si 20 est « simplement » multiplié par 3. Derrière un « simple calcul », on peut toujours faire l'expérience d'un nombre concret, par exemple 120 gouttes de médicament.

Il faut aussi apprendre à s'en passer, car même si 3×2 billes n'est pas la même chose que 2×3 billes, en arithmétique $3 \times 2 = 2 \times 3$. Cela peut être utile : 99×2 est plus facile à calculer lorsqu'il est pensé comme $2 \times 99 = 200 - 2$. Beaucoup d'enfants le découvrent d'eux-mêmes, certains ont besoin qu'on attire leur attention sur cette possibilité.

En tant qu'enseignant, vous pouvez apporter votre soutien de plusieurs manières. Par exemple, en proposant des exercices dans lesquels les enfants peuvent, dans des calculs purs, trouver eux-mêmes les propriétés utiles.

Par exemple : $2 + 7 + 8 + 4 + 6 + 3 = (2 + 8) + (7 + 3) + (4 + 6) = 3 \times 10 = 30$.

> Il ne s'agit *surtout pas* de règles de calcul, que les enfants doivent connaître par cœur. Mais il s'agit de leurs propres découvertes qui peuvent simplifier ou raccourcir leurs calculs. L'attention portée à ces découvertes développe une attitude mathématique chez les enfants, les stimule à rechercher la régularité, les propriétés et la structure des nombres, et leur donne aussi une perspective sur la beauté des mathématiques. Dans chaque classe, il y a des enfants qui possède presque naturellement une telle attitude mathématique.

Voici quelques exemples de propriétés au niveau de l'arithmétique de troisième classe :

∗ La propriété de commutativité : $5 + 12 = 12 + 5$ et $3 \times 8 = 8 \times 3$.

∗ La propriété d'associativité : $(5 + 8) + 2 = 5 + (8 + 2)$.

∗ Enlever et ajouter : $17 + 9 = 16 + 10$.

18. Voir le chapitre 5 sur les fractions.

* Diviser par deux et doubler : $16 \times 5 = 8 \times 10$.
* Simplifier ou élargir ou : $68 : 4 = 34 : 2$ et $115 : 5 = 230 : 10$.
* La propriété de distributivité : $6 \times 14 = 6 \times 10 + 6 \times 4$

Les enfants peuvent désormais s'amuser véritablement avec toutes sortes de calculs abstraits. Pour certains, on ne peut pas les rendre assez difficiles. Les enfants qui aiment les maths s'amusent à imaginer et à résoudre eux-mêmes des problèmes. Les nombreuses façons dont ils ont appris les quatre opérations leur donneront la liberté et la confiance nécessaires pour suivre leur propre voie et concevoir leurs propres stratégies de calcul. Après tout, calculer habilement consiste à agir habilement, à se déplacer habilement, et cela à l'intérieur du monde des nombres.

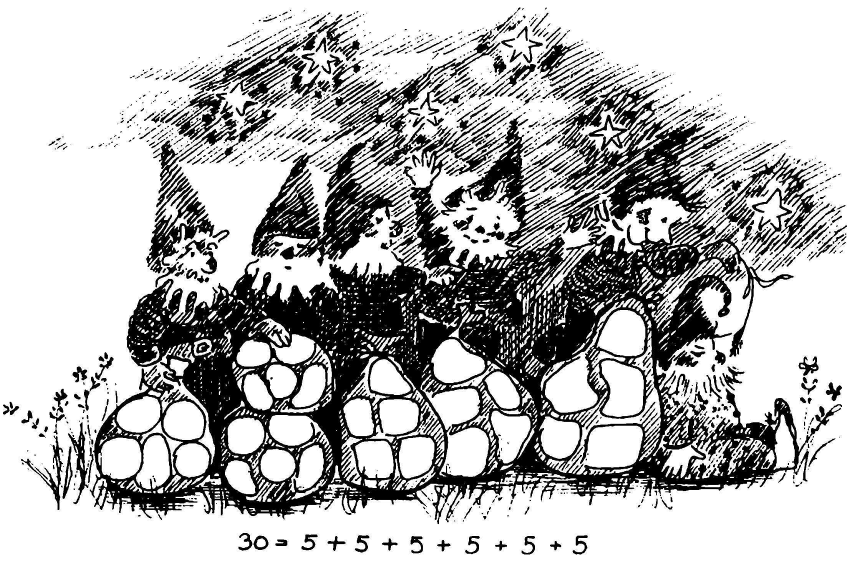
Il reste la question de savoir si le choix des stratégies arithmétiques dans la résolution des calculs est basé sur le tempérament de l'enfant, sur ses dispositions. Comprend-il mieux sa « propre voie » ? Quelle place accorder maintenant à la discussion en classe, dans laquelle les différentes stratégies arithmétiques sont présentées par les inventeurs eux-mêmes pour être examinées plus en détail par les autres ? L'enseignement interactif des mathématiques sert également à l'organisation des régularités trouvées, et donc à la prise de conscience. Il contribue ainsi à la formation de l'individualité de l'enfant.

6 Le travail au cahier

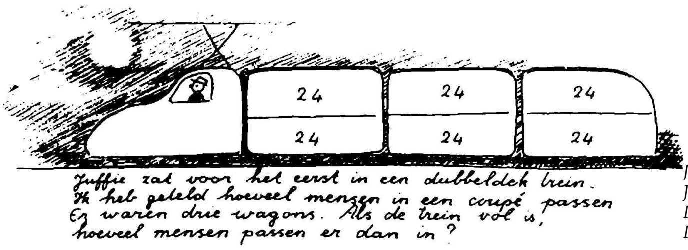
Ce qui est vécu durant la période de calcul en tant que forme en mouvement ou en tant qu'activité de calcul concrète peut donner lieu à un travail sur papier. Durant les deux premières périodes, on ne met pas encore de calcul par écrit. Néanmoins, un travail préparatoire peut être effectué. Les activités autour des quatre opérations sont retravaillées par les enfants au travers de « dessins de calcul ». Plus tard, ils y ajouteront des nombres.

Sur la base de ce travail, les premiers « vrais calculs » peuvent apparaître à la fin de la première classe. Par « vrai calcul » , on entend une écriture comme $10 = 2 + 3 + 5$. Cette répartition, par exemple à partir de 10 marrons, est un exercice de calcul à part entière. Ce type de calcul trouve son origine dans quelque chose qui est réalisé et vécu dans le jeu, dans le mouvement.

* Par exemple, les nains qui portent leurs sacs avec des pierres peuvent être dessinés sur papier. Ils ont besoin de trente pierres. Il y en a 5 dans chaque sac. Dans le dessin, on peut voir les 5 pierres de chaque sac.



* Dans le palais du roi, il y a douze salles, chacune avec une fenêtre. Dessinons le devant du palais : combien de pièces peut-on voir ?
* Dessins sur un sujet naturel : un jardin avec 6 fleurs qui forment un tout, ou des tas de troncs dans la forêt. Ou encore la tulipe et le lys, chacun avec 6 pétales, ou l'hibiscus avec 5 pétales. Combien de pétales voyons-nous dans un arbuste d'hibiscus à 6 fleurs ?
* Des « dessins de quantités » : compose toi-même un dessin dans lequel tu as caché les quantités 3, 4 et 5.

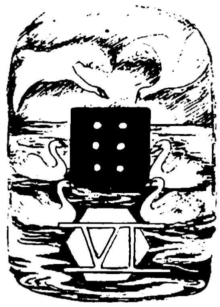


Julie a pris un train à double étage
J'ai dessiné combien de personnes vont dans un wagon.
Il y avait trois wagons.
Il y a combien de personnes dans le train quand il est plein ?

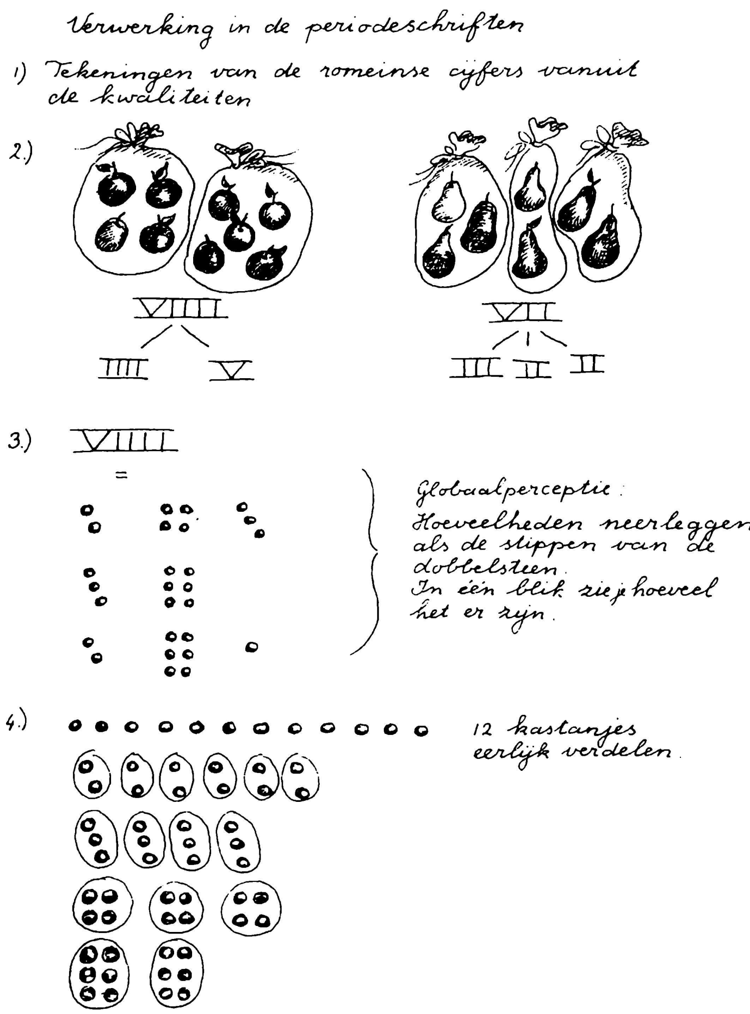
Normalement, il n'y a pas de mots ou de nombres dans un dessin. Mais c'est tout à fait possible dans un dessin de calcul. En tout cas, cela ne dérange pas.
L'exemple des trente pierres peut déboucher par la suite sur un calcul. Par exemple, $30 = 5+5+5+5+5+5$. Maintenant, certains nombres peuvent déjà être écrits avec les quantités dessinées comme préparation.

Quel autre travail écrit en première classe ? Beaucoup, si l'enseignant est assez inventif. Le *dessin de formes* peut être une belle occasion et un soutien important. Si les enfants sont occupés avec *les nombres et leur qualité*, les chiffres, individuellement, peuvent apparaître en grand sur le papier. Dans le dessin (de formes), l'enfant repasse plusieurs fois sur la forme de sorte qu'elle soit bien ancrée dans le corps. Cela peut aussi se faire avec la forme des chiffres.
En outre, quelque chose des *qualités des nombres* peut être rendu visible dans les dessins (en couleur) : les 3 rois, le nid d'abeille hexagonal, les 7 couleurs de l'arc-en-ciel.






Les dessins réalisés dans le contexte du thème de *la qualité des nombres* ont une bonne place lors de la première période de calcul.
De plus, toutes sortes de répartitions peuvent être reproduites sur papier, qui ont d'abord été réalisées en pratique à partir de marrons, noisettes ou de n'importe quels petits objets. De cette façon, les enfants peuvent montrer comment le nombre 7 peut être partagé en 1 et 6 ; 2 et 5 ; 3 et 4 ; 4 et 3 (ce qui est différent de 3 et 4) ; 5 et 2 ; 6 et 1. La même chose peut se faire avec la division en trois groupes.



Travail au cahier de période

Dessins des chiffres romains à partir des qualités

Perception globale :

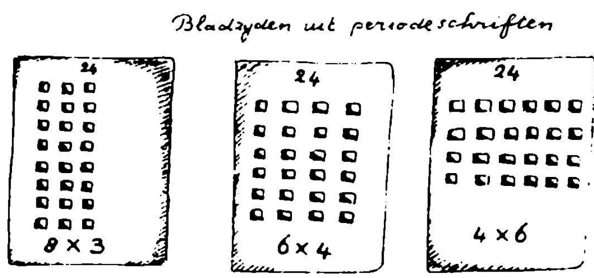
Traces d'un jeu de dés

Est-ce que tu vois en un coup d'œil combien cela fait ?

Partager 12 marrons de manière équitable

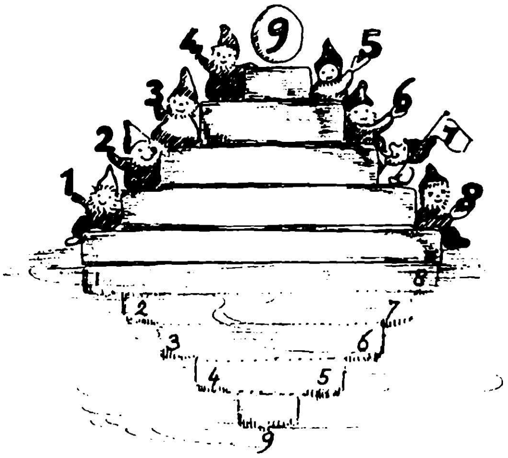
La représentation d'un bus à impériale, le célèbre bus de la ville de Londres, est intéressante. 7 passagers arrivent. Comment peuvent-elles se placer dans le bus (combien au-dessus, combien en-dessous) ? Question importante : « Avez-vous trouvé toutes les possibilités ? Combien de répartitions différentes existe-t-il dans le cas de sept passagers ? Comment en être sûr? »

Un problème : *Les enfants ont réparti 24 objets en plusieurs tas. À quoi cette répartition peut-elle ressembler ?* La solution peut être élaborée sur papier. Les résultats peuvent être très différents. Bien sûr, les enfants se montrent les uns les autres comment ils ont fait leur répartition. Cela invite à faire encore et toujours de nouveaux partages.

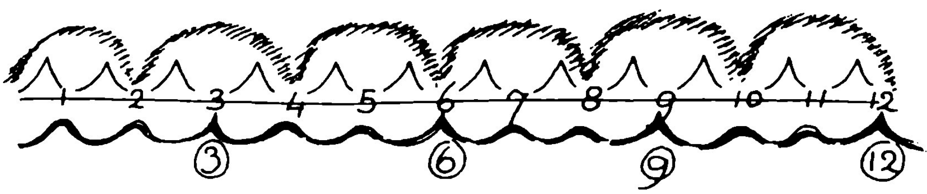


Pages d'un cahier de période

Le partage d'un nombre en « calcul » peut également être visualisé par un « escalier » : les deux nombres opposés redonnent le tout. Cela peut se faire avec plus de nombres et aussi avec des variantes.

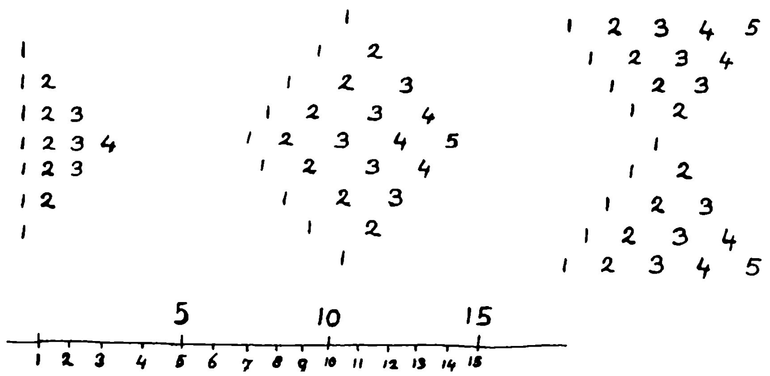


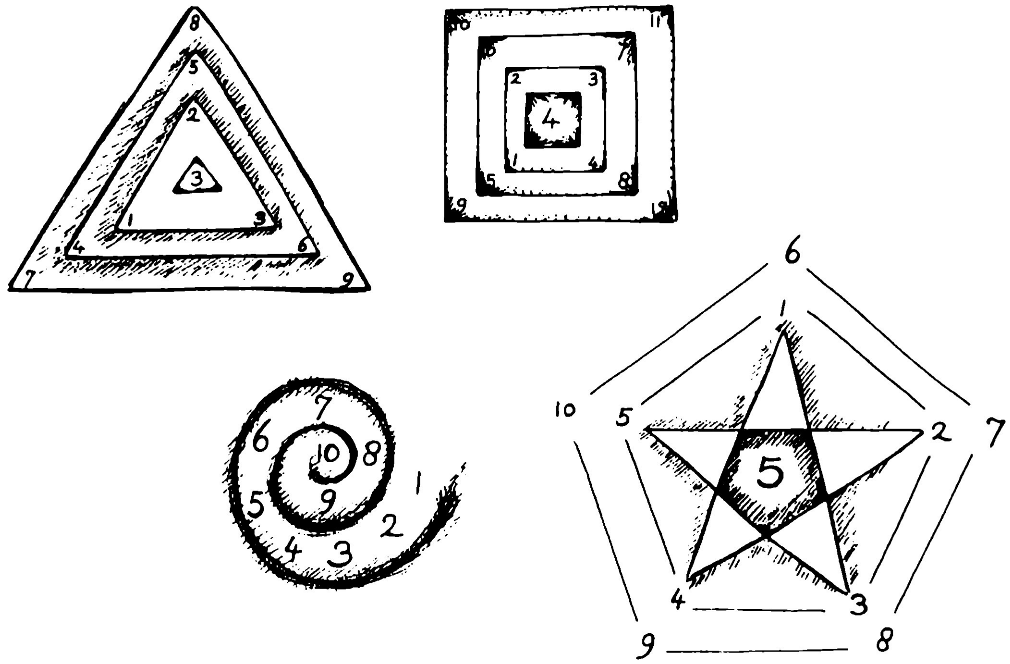
Lorsqu'en première classe les enfants commencent à compter, puis comptent avec certains rythmes, en marchant, en sautant, etc, les suites de nombres correspondantes peuvent être retravaillées en dessin de formes. C'est aussi une bonne préparation pour le calcul que l'on réalisera sur papier. Ce qui a été vécu est maintenant rendu visible. Les régularités du mouvement deviennent de beaux motifs visuels sur le papier. De cette manière, nous jetons aussi les bases de l'un des modèles de pensée mathématique les plus importants : la *droite numérique*. Les différentes structures, qui deviennent visibles avec les rythmes et les régularités de l'univers des nombres, vont s'avérer utiles plus tard. Il suffit de penser aux tables de multiplication.
Au centre de la feuille on place une ligne ininterrompue, la droite numérique avec la suite indifférenciée des nombres. Au-dessus et en-dessous on dessine des arcs qui montrent de qui est accentué. Au fur et à mesure que les enfants bougent sur davantage de rythmes et les « cartographient », ces formes peuvent être développés.



C'est également une bonne idée de laisser les jeunes enfants représenter le rythme des suites dans une chaîne de perles sur une corde. Cette activité prépare bien la droite numérique qui est plus abstraite. Certains collègues ont utilisé pour cela une version bon marché d'un couvre siège auto en billes de bois.

Au travers des formes géométriques qui sont au centre de la première classe, on peut aussi travailler l'écriture. C'est un défi pour les enfants que tout soit joliment dessiné sur le papier. Ici aussi, on y ajoute chaque fois un nouvel élément et la forme s'enrichit de plus en plus. Les enfants peuvent alors faire beaucoup de découvertes dans les jours suivants. Quels nombres allons-nous voir apparaître ?



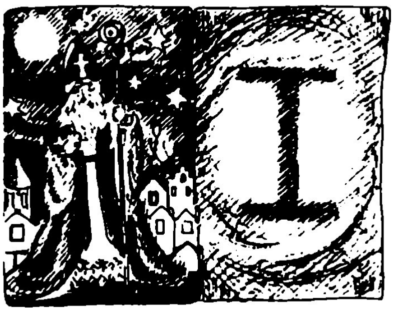


À la fin de la première, et encore durant la deuxième classe, on peut utiliser différents patterns de nombres. Il y a beaucoup de variations possibles. Les figures qui servent de modèle peuvent prendre la forme d'un cercle, d'un triangle ou d'un carré...

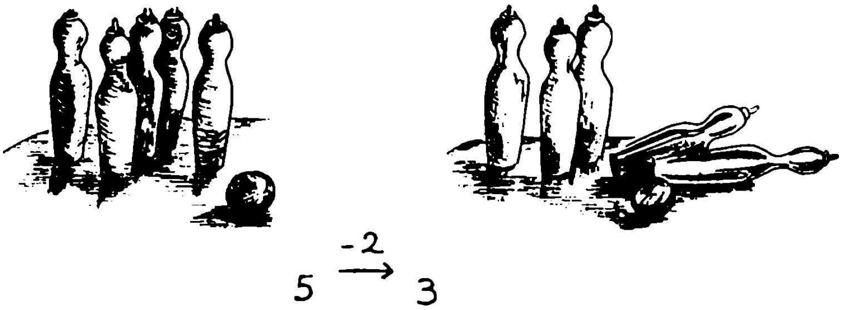
Il faut de la concentration et de la persévérance pour représenter avec précision de tels patterns de nombres. D'autre part, la beauté du monde numérique peut également se vivre ici.
En même temps, c'est aussi un bon exercice pour apprendre à placer les nombres correctement. Assembler les éléments bien l'un en-dessous de l'autre nécessite certainement un peu de pratique.
Au début, de tels patterns de nombres ne devraient pas comporter trop de nombres. Une grande attention doit être accordée à la manière dont chaque chiffre est tracé : comment commencer, dans quelle direction tourner ? Et on peut repasser sur le même chiffre plusieurs fois, jusqu'à ce qu'il apparaisse bien clairement !
Plus tard, les suites peuvent contenir plus de nombres, de sorte que les enfants deviennent capables de produire une feuille ordonnée pleine de nombres, qui peut être perçue à partir de toutes sortes de principes de classement.
La question centrale est ici aussi : *quel peut être le vécu les enfants ?* C'est de cela qu'il s'agit avant tout. Même dans le travail écrit, on s'adresse aussi aux sentiments vécus par l'enfant.

Les bonnes idées provenant de l'éducation réaliste aux mathématiques peuvent également être incluses dans le cadre ci-dessus. En voici quelques-unes :

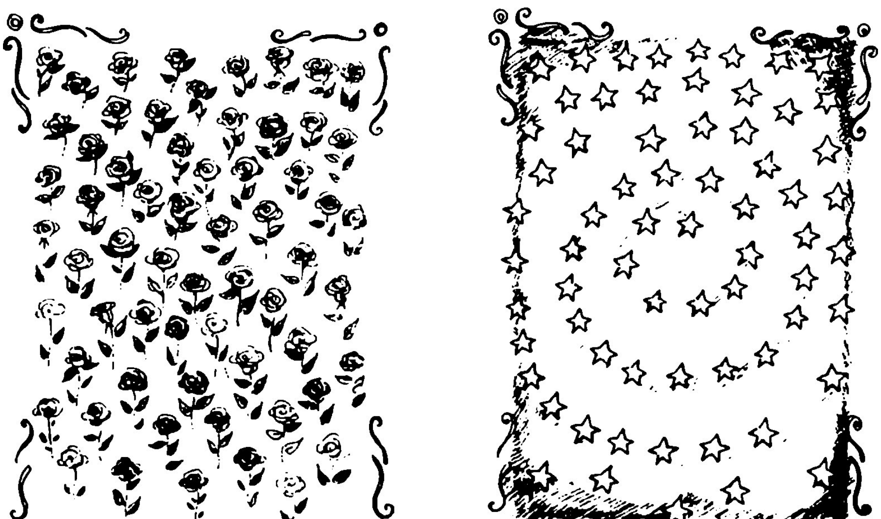
* Les enfants font un petit livret. Au travers d'un dessin, ils rendent visible ce qu'ils ressentent vis-à-vis du nombre écrit à côté (individuellement ou à plusieurs).



* Dans la salle de classe, un bus à double étage est construit avec des tables et des chaises. Les répartitions de passagers peuvent être dessinées plus tard.
* Un jeu de bowling dessiné avec le langage des flèches [19].



* Sur les feuilles, il y a deux grandes quantités (fleurs, étoiles, ...). Où y en a-t-il plus ? Ils ne peuvent pas être comptés, il faut donc concevoir d'autres approches.



Waarvan zyn er meer ? *De quoi y a-t-il le plus ?*

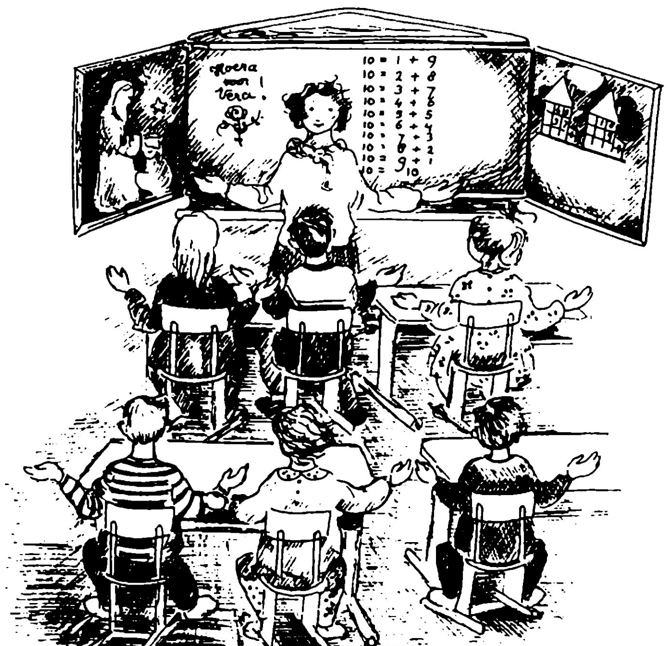
* De grandes affiches sont faites sur lesquelles des problèmes de comptage ont été dessinés. Compter devient plus difficile si on ne peut pas toucher les objets à compter, ou s'ils bougent, ou si on ne les voit pas tous en même temps.
* Il y a des blocs de construction dans la classe. Qui peut compter, sans bouger de sa place, combien de blocs sont utilisés dans une construction ? Chacun peut aussi faire un dessin pour faciliter le comptage.

19. Voir la section *Les quatre opérations*.

* Avec le boulier compteur, on crée des images de nombres à partir de « totalités ». Elles peuvent aussi être dessinées. Avec de petites cartes, on peut aussi exercer cela. Plus d'informations à ce sujet dans *Willem Bartjens, jrg. 10, n ° 3*. On y montre deux alternatives pour le boulier compteur. Elle sont toutes les deux d'architecture réaliste.
* L'enseignant peut construire des jeux de société comme le jeu de l'oie. Les nombres sont associés aux points des dés et aux nombres sur le plateau.

À toutes fins utiles : lorsqu'on travaille au premier cahier de calcul – que l'on assemble éventuellement à partir de feuilles séparées – il faut être attentif à ceci. Les bonnes habitudes doivent être apprises et vécues, elles ne se présentent jamais automatiquement. Il faut consacrer de l'attention et du soin au travail, et rester concentré. Utilisez des couleurs lorsque cela peut avoir du sens. Prenez le temps de bien faire comprendre ce que vous faites. Essayez toujours de rappeler à quelle occasion de tels calculs ont d'abord été *faits*.

Et rappelez-vous : l'enseignant montre les bonnes habitudes lorsqu'il utilise le tableau. Ce qui est écrit ou dessiné au tableau devrait être « beau ». Le tableau est un exemple de page dans le cahier, il ne s'agit certainement pas uniquement d'un outil pour les exercices. Le panneau central est le panneau de travail, les jolis dessins se mettent sur les rabats (ce que vous mettez au tableau nécessite une bonne préparation). Le tableau se termine en classe devant les enfants. Ce faisant, l'enseignant peut montrer le bon exemple. Des images peuvent être mises sur le tableau pour faciliter la mémorisation. Le tableau doit non seulement pensé comme étant vu par les élèves à partir de leur place, mais les enfants peuvent aussi venir pour y apporter une contribution. Au tableau, « le monde » peut aussi être montré d'une manière différente. On peut aussi mettre au tableau une situation appropriée à partir de la réalité, sur la base de laquelle on peut penser et résoudre des problèmes de calcul.



De basisvaardigheden onder de 10 en onder de 20 moeten geautomatiseerd zyn.
Elke dag het "splitsballet": 10 = (klap)
Zie ry op het bord en 1 (hand naar links)
gebaren op tekening. en 9 (hand naar rechts)

Les opérations avec 10 et avec 20
doivent être automatisées

Chaque jour, « le ballet du partage » : 10 = *(frapper dans les mains)*
Regardez la suite au tableau *1* *(une main à gauche)*
et les gestes sur le dessin *9* *(une main à droite)*

7 Commentaires du traducteur

7.1 Distinction entre nombre et chiffre – Écriture des nombres

Pour beaucoup de monde, y compris certains professeurs, un chiffre est un nombre de 0 à 9. Ceci est une idée erronée. Les chiffres sont des lettres qui permettent d'écrire efficacement les nombres (que l'on peut par ailleurs écrire également avec des lettres : un, deux,....). De même que les lettres « s », « o », « l », « e » et « i » permettent d'écrire le mot « soleil », les chiffres « 1 » et « 2 » permettent d'écrire le nombre « 12 ». Personne n'a besoin de savoir lire et écrire pour savoir ce qu'est le soleil. De même, personne n'a besoin de connaître les chiffres pour comprendre ce qu'est le nombre – la quantité – 12. Un mot exprime un concept. Un nombre est un concept particulier.

Mais, me direz-vous, « 4 » est à la fois un chiffre et un nombre. En fait, le nombre 4 s'écrit avec un seul chiffre. De la même manière que « a » est un mot qui s'écrit avec une seule lettre. On peut d'ailleurs remarquer que le nombre « 4 » s'écrit avec plusieurs chiffres dans d'autres systèmes de numération, par exemple « IIII » ou « IV » en chiffres romains, « 100 » en numération binaire.

L'écriture des nombres est conventionnelle alors que les nombres ne le sont pas. L'intérêt de la numération romaine est que cette écriture reste proche du concept, ce qui n'est plus le cas avec la numération indo-arabe que nous utilisons. Celle-ci est complexe. Il faut donc apporter beaucoup de soin à son introduction. Pour cela, il est important de trouver une image pour chaque chiffre qui le rapproche du nombre exprimé au travers de ce symbole. La question du passage à la dizaine est bien sûr un passage à soigner. On peut consulter à ce sujet le livre de Ernst Schubert *Der Anfangsunterricht in der Mathematik an Waldorfschulen – Les premiers pas en mathématique dans les écoles Waldorf* dont une traduction/résumé est disponibile sur le même site que ce texte.

7.2 Différentes sortes de nombres ?

Plusieurs distinctions sont faites dans ce chapitre entre des « sortes » de nombres. J'essaie ici de mettre au clair certaines de ces distinctions

Positions et quantités

→ Lorsque les nombres indiquent une position dans un ensemble d'éléments placés dans un certain ordre, ils sont appelés *ordinaux* : premier, deuxième, 3^e, 4°, etc. Ils n'expriment pas de quantités et on ne peut pas faire d'addition avec ces nombres.

→ Lorsque les nombres désignent des quantités, il sont appelés *cardinaux*.

Il ne faut certainement pas introduire les noms « ordinaux » et « cardinaux », mais avoir en tête ces deux concepts qui peuvent être source de confusion pour certains élèves.

La question du calcul avec les nombres ordinaux est plus complexe qu'il y paraît au premier abord. Additionner le 2^e étage et le 5^e étage ne donne pas le 7^e étage ! Mais on peut se poser la question : de combien d'étages sommes-nous montés en passant du 2^e au 7^e étage ? Les nombres ordinaux peuvent donc apparaître dans des calculs. La mise en relation, avec ce type de question, entre la position et la quantité se retrouve dans un grand nombre de situations. Prenons comme exemple la mesure du temps. Quand nous disons « il est 11h00 », nous indiquons une position dans la journée. Quand nous disons, le voyage a duré une heure, nous indiquons une « quantité de temps ». Certaines langues distinguent clairement les deux concepts. Par exemple, en allemand, le mot « Uhr » désignent l'heure qui marque la position et le mot « Stunde » désigne une durée d'une heure.

Nombres concrets et nombres purs

Un nombre concret est un nombre attaché à des éléments concrets : 3 pommes, 2 chats, etc. Le nombre pur est dégagé de son aspect concret. Le nombre (presque) pur apparaît dès que l'on fait une multiplication. Combien font 2 fois 3 pommes. Il ne s'agit aucunement de calculer 2 pommes fois 3 pommes ce qui n'a aucun sens, mais de prendre, au sens littéral du terme 2 fois la même quantité (3 pommes). Dans la multiplication, les deux nombres jouent donc un rôle très différent.

Des confusions peuvent apparaître dans ce contexte. Un exemple particulièrement frappant est celui de la mesure des surfaces (ou des volumes). Un cm^2 ne s'obtient pas en multipliant un cm par un cm. Multiplier des cm entre eux n'a pas de sens. L'unité que l'on choisit (c'est conventionnel) pour la mesure des surfaces est un carré dont le côté mesure 1 cm. Plutôt que de dire cela chaque fois (un carré dont le côté mesure 1 cm), on dit centimètre carré et on l'écrit cm^2, ce qui prête bien sûr à confusion. Penser que l'on multiplie des cm entre eux peut ne pas sembler grave, et sans doute cela ne l'est-il pas pour la plupart des élèves. Mais cela crée une distortion de sens qui peut être problématique pour certains, puisqu'on ne multiplie jamais des nombres concrets entre eux.

Il faut aussi remarquer qu'un chemin important dans l'apprentissage des maths – qui reflète en cela celui l'histoire des maths – est d'intégrer de plus en plus de nombres « purs » à l'ensemble des nombres. Chacun de ces ajouts pose des difficultés qui lui sont propres. Un exemple en est celui des fractions. Elles apparaissent dans de multiples contextes sous des formes différentes : ce sont des « opérateurs » (prendre le quart d'une pizza), elles expriment un rapport, elles donnent une fréquence (3 fois sur 4), elles s'écrivent sous forme de pourcents, ou sous forme décimale... Toutes ces facettes se rassemblent pour finir dans un seul concept, celui de nombre rationnel.

Il faut du temps pour passer des nombres concrets aux nombres purs et s'il ne faut pas forcer les choses, il ne faut pas non plus perdre cet objectif de vue.

Mesurer et compter ?

À la page 9, une distinction est faite entre des nombres-mesures (*meetgetallen*) et les nombres qui servent à compter (*telgetallen*). Les auteurs ont voulu manifester de cette manière la différence entre deux types de comptage : un comptage d'intervalles qui correspond à une mesure et un comptage simple dans lequel on associe la suite des nombres à des objets. Plus que cette distinction, il me semble que ce qui est essentiel dans les situations présentées est la distinction entre position et mouvement pour aller d'une position à une autre : un pas est un mouvement qui va d'une position à une autre. De manière générale, un intervalle est ce qui va d'une « position » à une autre.

7.3 Point de départ

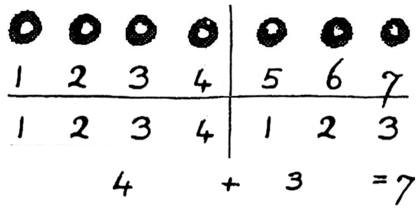
Steiner nous invite à proposer aux élèves des concepts qui puisse grandir avec eux, s'élargir, se modifier. En mathématiques, la plupart des concepts doivent pouvoir grandir. La notion de nombre par exemple s'est enrichie tout au long de l'histoire des maths. Une des frontières qui doit être franchie à un moment est celle des nombres négatifs. Faire partir le comptage en mouvement dos au mur, comme c'est indiqué à la page 12, donne une image inexacte des nombres puisqu'il semble y avoir une barrière infranchissable dans la direction des négatifs. Tracer une ligne au sol pour signaler le point de départ laisse plus d'ouverture à la possibilité de faire le pas vers les nombres négatifs lorsqu'il sera temps de le faire.

7.4 Position et mouvement

La difficulté mentionnée à la page 12 lors de l'aller-retour ne provient pas de la différence qu'il y aurait entre les « nombres-mesures » et les « nombre pour compter », mais du mélange entre position et mouvement. La solution évidente est de ne compter que les déplacements, puisque c'est de cela dont il est question ici. Pour faire correspondre les positions et les déplacements, il faudrait tenir compte de la position 0, c'est-à-dire le point de départ, ce qui est bien trop avancé pour ce niveau, même si certains élèves peuvent y penser par eux-mêmes.

7.5 Addition à partir du comptage

J'ai de beaucoup de réserve par rapport à la proposition de von Baravalle présentée à la page 24. Cette manière de procéder peut entraîner des confusions entre plusieurs notions : nombres, chiffres, comptage. Les chiffres ne sont que les symboles qui permettent d'écrire des nombres (voir commentaire plus haut sur l'écriture des nombres). Si on souhaite absolument se baser sur l'exemple donné, je propose alors la présentation suivante :



L'addition se réfère ici à des objets (pommes, marrons...). Il y a deux lignes de comptage pour déterminer les quantités : le comptage global et les comptages de chaque partie.
Pour introduire les opérations, il y a beaucoup de possibilités de trouver des images parlantes qui les caractérisent, en les différenciant peut-être encore plus que l'exemple des gnomes donné la page 26. Voici par exemple des images qu'un professeur de classe a utilisées et qui me paraissent respecter l'esprit des opérations et des tempéraments. Dans un château, la fermière Plusalie apporte ses produits dans deux seaux qu'elle porte elle-même (dans le dessin, elle les porte assez haut, au but de ses bras, pour faire apparaître un $+$). Moincinet, le basset du chateau, vient chaparder des saucisses dans la cuisine. Multiplix, le fou du roi, fait des blagues et transforme toutes les commandes ou les recettes en multipliant les ingrédients, etc.

7.6 Nombres actifs et passifs

À la page 27, il est fait référence à l'élément « actif » d'une opération.

Dans une opération, on peut (presque) toujours considérer un élément passif qui est celui qui « subit » l'opération et un élément actif qui est celui qui « opère ». Quand on multiplie 20 par 4, il est clair que 4 est l'élément actif qui agit sur 20. La seule exception est sans doute l'addition présentée de manière analytique. Il s'agit alors d'une décomposition plus « neutre » : $5 = 3 + 2$. C'est en la considérant du point de vue synthétique que cette distinction apparaît dans l'addition. Un exemple flagrant qui le fait bien comprendre est celui du millionnaire qui reçoit un euro. Même si le résultat final est le même, l'élément actif n'a pas le même impact que lorsque quelqu'un qui n'a qu'un euro en poche gagne un million à la loterie.

7.7 Divisions partage et contenance

Je voudrais nuancer le point de vue de la pédagogie réaliste présenté à la page 32. De même qu'il y a une distinction de sens entre la différence et la soustraction à proprement parler, il y a une grande différence entre les deux divisions qui sont les opérations inverses de la multiplication (6, c'est 3 fois 2. Combien vaut 6 partagé en 3 ? Combien de fois 2 y a-t-il dans 6 ?). S'il ne faut pas introduire un vocabulaire spécifique pour cela, il faut exercer les deux types de divisions (partage et contenance). On peut remarquer chez un certain nombre d'élèves plus âgés que la relation entre la division et la multiplication (il faudrait dire entre les divisions et la multiplication) reste problématique. Il me paraît utile d'avoir beaucoup d'exercices où les élèves peuvent travailler le sens des deux divisions en lien avec la multiplication.